

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Ingeniería Mecánica

**DESARROLLO Y VERIFICACIÓN DE UN SOFTWARE PARA EL
ANÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS A TORSIÓN**



Memoria – Presupuesto – Manual de Usuario – Anexos

Autor: Neus Figuera Pérez

Director: Ferran Prats Bella

Departamento: RMEE

Convocatoria: Mayo 2018



Índice

Resumen	i
Abstract.....	ii
Resum	iii
Glosario	iv
Memoria.....	1
1. Prefacio	2
1.1. Origen del trabajo.....	2
1.2. Motivación.....	2
1.3. Requerimientos previos.....	2
2. Introducción	3
2.1. Objetivos del trabajo	3
2.2. Alcance del trabajo	3
3. Introducción teórica	4
3.1. Elemento estructural	4
3.2. Propiedades.....	5
3.2.1. Propiedades elásticas	5
Módulo de cizalladura $[G]$	5
Módulo elasticidad longitudinal $[E]$	5
3.2.1. Propiedades seccionales.....	5
Inercia a torsión $[I_T]$	5
Inercia de alabeo $[I_w]$	5
3.3. Torsión.....	6
3.3.1. Desplazamientos propios de la torsión.....	6
Giro $[\theta]$	6
Alabeo $[\theta']$	6
3.3.2. Esfuerzos propios de la torsión.....	6
Torsión de Saint-Venant $[T_{SV}]$	6
Torsión de alabeo $[T_w]$	6
Torsión total $[T]$	6
Bimomento $[B]$	6
3.3.3. Analogía con la teoría elemental de la flexión	7
4. Desarrollo de los cálculos	8
4.1. Conceptos generales: torsión caso general	8
4.2. EDO.....	9

4.3.	Matriz de rigidez.....	13
4.4.	Vector de cargas nodales.....	14
5.	Programa para vigas continuas sometidas a torsión	15
5.1.	Interfaz	15
5.2.	Código del programa	16
5.2.1.	Código de las funciones del programa	26
	Función "CH"	26
	Función "SH"	26
	Función "Coeficientes"	26
	Función "STIFFNESS"	27
	Función "UNIFORMLOAD"	28
	Funciones "STIFFNESS_EIA" y "STIFFNESS_GIT"	29
5.3.	Resultados	30
6.	Verificación del software.....	32
6.1.	Casos particulares para verificar el programa	33
6.1.1.	Desarrollo de los cálculos	33
	1) Caso Particular 1	35
	2) Caso Particular 2	38
	3) Caso Particular 3	40
	4) Caso Particular 4	42
6.1.2.	Resumen de los resultados	44
	1) Caso Particular 1	44
	2) Caso Particular 2	44
	3) Caso Particular 3	44
	4) Caso Particular 4	44
6.1.3.	Programación de los casos.....	45
	Código de la función	45
	1) Caso Particular 1	46
	2) Caso Particular 2	46
	3) Caso Particular 3	46
	4) Caso Particular 4	46
6.1.4.	Obtención de los resultados	48
	1) Caso Particular 1	49
	2) Caso Particular 2	55
	3) Caso Particular 3	57
	4) Caso Particular 4	59

6.1.1.	Comparación de gráficas	61
1)	Caso Particular 1	61
2)	Caso Particular 2	62
3)	Caso Particular 3	63
4)	Caso Particular 4	64
6.1.2.	Comparación de resultados	65
6.2.	Ejercicio para verificar el software	66
6.2.1.	Enunciado del ejercicio	66
6.2.2.	Datos a introducir en el software	66
6.2.3.	Resultados del libro	67
6.2.1.	Resultados del software	68
6.2.2.	Comparación de resultados	69
	Conclusiones	70
	Presupuesto y Análisis Económico	71
	Bibliografía	72
	Enlaces útiles.....	73
	Manual de usuario	74
	Anexo	78
[A1]	Módulos de elasticidad y de cizalladura	79
[A2]	Tablas de perfiles.....	80
	Perfiles IPN	80
	Perfiles IPE.....	81
	Perfil HE.....	82
	Perfil UPN	84
	Perfil L.....	85
	Perfil LD	87
	Perfil T	89
[A3]	Obtención de la solución a la ecuación homogénea	90
[A4]	Regla de Cramer	91
[A5]	Linealización de la matriz de rigidez	92
[A6]	Resultados de los Casos Particulares	93
1)	Caso Particular 1	93
2)	Caso Particular 2	96
3)	Caso Particular 3	99
4)	Caso Particular 4	102
	Visto bueno-autorización de defensa del TFG.....	105

Índice de tablas, figuras y gráficas

Tabla 1: Resumen de la analogía entre la teoría de flexión y la teoría de torsión de alabeo.	7
Figura 1: Viga continua de longitud L	10
Figura 2: Viga empotrada por los dos extremos con sus reacciones.	14
Figura 3: Interfaz del software.	15
Figura 4: Interfaz de los resultados del software.	30
Figura 5: Tablas de los resultados en los nodos del software.	30
Figura 6: Tabla de los resultados del software en las coordenadas a lo largo de la viga.	31
Figura 7: Representación gráfica de las torsiones y el bimomento a lo largo de la viga.	31
Figura 8: Representación del Caso Particular 1.	35
Figura 9: Representación del Caso Particular 2.	38
Figura 10: Representación del Caso Particular 3.	40
Figura 11: Representación del Caso Particular 4.	42
Tabla 2: Datos comunes para todos los casos particulares.	48
Tabla 3: Resultados exactos del Caso Particular 1.	49
Figura 12: Parámetros generales del Caso Particular 1, con 10 elementos.	49
Figura 13: Características nodales del Caso Particular 1, con 10 elementos.	50
Figura 14: Conectividad y momento torsor uniforme del Caso Particular 1, con 10 elementos.	50
Figura 15: Resultados de los nodos del Caso Particular 1, con 10 elementos.	50
Gráfica 1: Representación gráfica del Caso Particular 1, con 10 elementos.	51
Figura 16: Resultados del primer elemento del Caso Particular 1.	51
Gráfica 2: Representación gráfica del Caso Particular 1, con 50 elementos.	52
Gráfica 3: Representación gráfica del Caso Particular 1, con 500 elementos.	52
Tabla 4: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 10 elementos.	53
Tabla 5: Resultados del software para el Caso Particular 1 para cada nodo, con 10 elementos.	53
Tabla 6: Resultados del software para el Caso Particular 1 para cada nodo, con 50 elementos.	54
Tabla 7: Resultados del software para el Caso Particular 1 para cada nodo, con 500 elementos.	54
Tabla 8: Resultados exactos del Caso Particular 2.	55
Gráfica 4: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 2.	55
Tabla 9: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 10 elementos.	56
Tabla 10: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 50 elementos.	56
Tabla 11: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.	56
Tabla 12: Resultados exactos del Caso Particular 3.	57
Gráfica 5: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 3.	57
Tabla 13: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 10 elementos.	58
Tabla 14: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 50 elementos.	58
Tabla 15: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos.	58
Tabla 16: Resultados exactos del Caso Particular 4.	59
Gráfica 6: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 4.	59
Tabla 17: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 10 elementos.	60

Tabla 18: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 50 elementos.	60
Tabla 19: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos.	60
Gráfica 7: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 1.....	61
Gráfica 8: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 500 elementos.	61
Gráfica 9: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 2.....	62
Gráfica 10: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.	62
Gráfica 11: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 3.	63
Gráfica 12: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos.	63
Gráfica 13: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 4.	64
Gráfica 14: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos.	64
Tabla 20: Comparación de los valores de referencia de todos los casos particulares.	65
Figura 17: Viga continua sometida a un momento torsor uniforme m_D	66
Tabla 21: Propiedades del ejercicio.	66
Gráfica 15: Resultados del libro a lo largo de la viga:	67
Gráfica 16: Resultados del software:	68
Tabla 22: Resultados del software en los apoyos.	69
Tabla 23: Coste del software.....	71
Tabla 24: Módulos de elasticidad y de cizalladura a T_{amb} para varios metales y aleaciones.....	79
Tabla 25: Dimensiones y términos de sección de los perfiles IPN.....	80
Tabla 26: Dimensiones y términos de sección de los perfiles IPE.	81
Tabla 27: Dimensiones y términos de sección de los perfiles HE (HEB, HEA y HEM).	83
Tabla 28: Dimensiones y términos de sección de los perfiles UPN.	84
Tabla 29: Dimensiones y términos de sección de los perfiles L.....	86
Tabla 30: Dimensiones y términos de sección de los perfiles LD.	88
Tabla 31: Dimensiones y términos de sección de los perfiles T.	89
Tabla 32: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 10 elementos.	93
Gráfica 9: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 10 elementos.....	93
Tabla 33: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 50 elementos.	94
Gráfica 10: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 50 elementos.....	94
Tabla 34: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 500 elementos.	95
Gráfica 11: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 500 elementos.	95
Tabla 35: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 10 elementos.	96
Gráfica 12: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 10 elementos.....	96
Tabla 36: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 50 elementos.	97
Gráfica 13: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 50 elementos.....	97
Tabla 37: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.	98
Gráfica 14: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.	98
Tabla 38: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 10 elementos.	99
Gráfica 15: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 10 elementos.....	99
Tabla 39: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 50 elementos.	100
Gráfica 16: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 50 elementos.....	100

Tabla 40: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos.	101
Gráfica 17: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos. ..	101
Tabla 41: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 10 elementos.	102
Gráfica 18: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 10 elementos.....	102
Tabla 42: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 50 elementos.	103
Gráfica 19: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 50 elementos.....	103
Tabla 43: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos.	104
Gráfica 20: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos. ..	104



Resumen

En el presente trabajo de fin de grado se desarrolla un software para calcular las torsiones a las que se ve sometida una viga continua. Es decir, se resuelve el problema de una viga continua sometida a torsión en su caso general y, por tanto, incluyendo la torsión uniforme y de alabeo.

El desarrollo del software se basa en la aplicación del método directo de la rigidez siendo necesaria la obtención de la matriz de rigidez de un elemento de viga sometida a torsión general. La obtención de las leyes de esfuerzos, en este caso, torsor uniforme, torsor de alabeo, torsor total y bimomento, necesitan de las correspondientes expresiones derivadas de la solución de la ecuación diferencial de la torsión.

El método se implementa mediante Visual Basic con una interfaz en Excel, para la entrada de datos y la salida de resultados.

Una vez desarrollado, se ha verificado dicho programa mediante dos pruebas diferentes. La primera verificación se basa en la creación de cuatro casos particulares para los cuales se ha hallado su solución exacta (analítica) para, posteriormente, comparar dicha solución a los resultados del software. La segunda verificación se desarrolla a partir de un determinado ejercicio resuelto, obtenido de la literatura, con unas características de viga concretas, las cuales se introducirán en el software para comparar que los resultados de este se corresponden a los resultados del ejercicio resuelto.

En el CD se incluye el software implementado en Microsoft Excel para los alumnos de la EEBE que estén interesados en las vigas continuas sometidas a torsión.

Abstract

In the present final degree project, a software has been developed to calculate the torsions to which a continuous beam is subjected. That is to say, the problem of a continuous beam subject to torsion in its general case and, therefore, including the uniform and warping torsion, is solved.

The development of the software is based on the application of the direct method of rigidity, being necessary to obtain the matrix of rigidity of a beam element subject to general torsion. The obtention of the laws of stress, in this case, uniform torsion, warping torsion, total torsion and bimoment, requires the corresponding expressions derived from the solution of the differential equation of torsion.

The method is implemented through Visual Basic with an interface in Excel, for data entry and results output.

Once developed, this software has been verified through two different tests. The first verification is based on the creation of four particular cases for which its exact (analytical) solution has been found, for later compare said solution to the results of the software. The second verification is developed from a determined solved exercise, obtained from the literature, with specific beam characteristics, which will be introduced in the software to compare that the output results correspond to the results of the solved exercise.

The CD includes the software implemented in Microsoft Excel for students of the EEBE who are interested in continuous beams subjected to torsion.

Resum

En el present treball de fi de grau s'ha desenvolupat un software per calcular les torsions a les què es veu sotmesa una biga contínua. És a dir, es resol el problema d'una biga contínua sotmesa a torsió en el cas general i, per tant, incloent la torsió uniforme i d'alabeig.

El desenvolupament del software es basa en l'aplicació del mètode directe de la rigidesa sent necessària l'obtenció de la matriu de rigidesa d'un element de biga sotmesa a torsió general. L'obtenció de les lleis d'esforços, en aquest cas, torsor uniforme, torsor d'alabeig, torsor total i bimoment, necessiten de les corresponents expressions derivades de la solució de l'equació diferencial de la torsió.

El mètode s'implementa mitjançant Visual Basic amb una interfície en Excel, per a l'entrada de dades i la sortida de resultats.

Un cop desenvolupat, s'ha verificat aquest programa mitjançant dues proves diferents. La primera verificació es basa en la creació de quatre casos particulars per als quals s'ha trobat la seva solució exacta (analítica) per a, posteriorment, comparar aquesta solució als resultats del software. La segona verificació es desenvolupa a partir d'un determinat exercici resolt, obtingut de la literatura, amb unes característiques de biga concretes, les quals s'introduiran en el software per comparar que els resultats d'aquest es corresponen als resultats de l'exercici resolt.

Al CD s'inclou el software implementat en Microsoft Excel per als alumnes de l'EEBE que estiguin interessats en les bigues contínues sotmeses a torsió.

Glosario

B , bimomento.

C_1, C_2, C_3, C_4 , constantes de integración.

E , módulo de elasticidad.

G , módulo de rigidez transversal o de cizalladura.

I_T , inercia a torsión o módulo de torsión uniforme o de St. Venant.

I_w , inercia de alabeo o módulo de alabeo.

m_D , momento torsor uniforme.

T_{SV} , torsión de Saint-Venant, uniforme o primaria.

T_w , torsión de alabeo o secundaria.

T , torsión total.

θ , ángulo de rotación.

θ' , derivada del ángulo de rotación, alabeo.

Memoria



1. Prefacio

1.1. Origen del trabajo

Este trabajo viene influenciado por la asignatura de Resistencia de Materiales, donde se utiliza un software similar, pero para el cálculo de tensiones y flexiones de vigas continuas, además, fue en esta asignatura donde se empezó a introducir el tema de la torsión.

1.2. Motivación

Este trabajo de fin de grado nace de mi interés personal en la programación unido al grado que estoy cursando, ingeniería mecánica. De ahí, surge la idea de programar un software donde se calculen las torsiones en una viga continua, uniendo programación con los conocimientos adquiridos en el grado de ingeniería mecánica.

1.3. Requerimientos previos

El desarrollo del presente trabajo de fin de grado requiere de un alto componente de aprendizaje autónomo, ampliando los conocimientos adquiridos en la carrera, debido a que el problema específico de la torsión no se contempla en su grado complejo en las asignaturas cursadas, viéndose únicamente el caso de la torsión uniforme o de St. Venant. Por tanto, ha sido necesario estudiar la torsión de alabeo y el caso general.

Para desarrollar el software, se necesitaban conocimientos de programación, en este caso concreto, de Visual Basic, que ha sido el lenguaje elegido para el software, así como también, conocimientos de torsión. Ambos los he adquirido a raíz de este trabajo, partiendo de los conocimientos previos de programación aprendidos en la asignatura de informática cursada en la carrera de ingeniería mecánica y de los conocimientos de estructuras y de esfuerzos a los que puede estar sometida una viga continua que se adquirieron en las asignaturas de Estructuras y de Resistencia de Materiales.

2. Introducción

El propósito de este Trabajo de Fin de Grado es desarrollar y verificar un software que analice el alabeo y la torsión en una viga continua, a partir de la introducción de las características de la viga, de los esfuerzos y restricciones a los que están sometidos sus nodos y del posible momento torsor uniforme al que pueden estar sometidos sus elementos, dando como resultado sus desplazamientos, torsiones y bimomento.

2.1. Objetivos del trabajo

El objetivo de este trabajo consiste en, partiendo de los conocimientos adquiridos en la asignatura de Estructuras y de una ampliación del temario que se dio en esta, introducirse en la torsión para desarrollar un software capaz de analizar, mediante los datos que se introduzcan en este, las solicitaciones a las que está sometida una viga continua, dando como resultados tanto el torsor de Saint-Venant, el torsor de alabeo, el torsor total, suma de ambos, y el bimomento, como los desplazamientos, es decir, el giro y el alabeo, de dicha viga.

Una vez desarrollado el software, se verificará mediante una serie de casos particulares y también comparando los resultados que dé el programa con los resultados de un ejercicio resuelto adquirido de la literatura.

2.2. Alcance del trabajo

En el alcance del presente Trabajo de Fin de Grado, la tipología estructural se ciñe a vigas continuas, siendo posibles continuaciones de este trabajo como, por ejemplo, la aplicación a emparrillados planos, pórticos planos u otras tipologías estructurales.

3. Introducción teórica

3.1. Elemento estructural

El software está centrado en una estructura particular, la viga continua de pared delgada. Para explicar por qué se ha elegido esta estructura en concreto se debe saber que, en ingeniería estructural, los elementos básicos pueden ser divididos de acuerdo con su carácter espacial en cuatro clases:

1. *Cuerpos masivos*: comprende cuerpos en los cuales sus tres dimensiones son comparables, como una esfera, un cubo, etc.
2. *Placas y láminas*: comprende cuerpos en los que una de sus dimensiones, la anchura, es pequeña comparada con las otras dos, la altura y la longitud.
3. *Vigas solidas*: comprende cuerpos que se caracterizan por el hecho de que dos de sus dimensiones, la altura y la anchura, son muy pequeñas comparadas con la tercera dimensión, la longitud.
4. *Vigas de pared delgada*.

La cuarta clase, comprende cuerpos que tienen la forma de láminas prismáticas alargadas. Se caracterizan por el hecho de que sus tres dimensiones difieren en magnitudes. La anchura de la lámina es pequeña comparada con las características de la sección transversal, y las dimensiones de la sección transversal son pequeñas en comparación con la longitud de la lámina. Ejemplos de vigas de pared delgada, las cuales son muy utilizadas en ingeniería estructural, son vigas metálicas laminadas, soldadas o remachadas, columnas, elementos de rectificadoras y marcos, etc.

Una característica de las vigas de pared delgada es que pueden sufrir una extensión longitudinal como resultado de la torsión. Consecuentemente, se crean tensiones normales longitudinales proporcionales a estas deformaciones, que conducen a un equilibrio interno de las fuerzas longitudinales en cada sección transversal.

Por estas características, las vigas de pared delgada y el sometimiento de estas a esfuerzos torsores serán el objetivo de este trabajo.

3.2. Propiedades

3.2.1. Propiedades elásticas

Estas propiedades vienen determinadas por el material que constituye la viga a analizar ^[A1].

Módulo de cizalladura [G]

El *módulo de cizalladura*, también llamado *módulo de elasticidad transversal* es una constante elástica que caracteriza el cambio de forma que experimenta un material elástico cuando se aplican esfuerzos cortantes.

Módulo elasticidad longitudinal [E]

El *módulo de Young* o *módulo de elasticidad longitudinal* es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según las tensiones normales aplicadas.

3.2.1. Propiedades seccionales

En este Trabajo de Fin de Grado no se profundizará en el cálculo de las propiedades seccionales, o términos seccionales. Por tanto, estas propiedades se obtendrán, en el caso de ser un perfil normalizado, de las Tablas de Perfiles ^[A2]. Estas propiedades también se podrían obtener a partir del software desarrollado por mi compañero de carrera, Javier Gilbert, en su trabajo de fin de grado.

Inercia a torsión [I_T]

La *inercia a torsión* o *módulo de torsión* es una propiedad geométrica de la sección transversal de una viga que está implicada en la relación entre el ángulo de torsión y el momento torsor uniforme aplicado a lo largo del eje de la barra. El momento de inercia a torsión, junto con las propiedades del material y la longitud, describe la rigidez torsional de una barra.

Inercia de alabeo [I_w]

La *inercia de alabeo* o *módulo de alabeo* de la sección transversal de una pieza prismática relacionada con su capacidad de deformarse fuera del plano de la sección, es decir, de alabear. La inercia de alabeo interviene en la obtención del torsor de alabeo, el bimomento y la propia matriz de rigidez del elemento en el caso de la torsión general.

3.3. Torsión

El objetivo del software es el cálculo del giro, el alabeo, el torsor de Saint-Venant, el torsor de alabeo, el torsor total, suma de ambos, y el bimomento. A continuación, se introducen estos desplazamientos y esfuerzos propios de la torsión.

3.3.1. Desplazamientos propios de la torsión

Giro $[\theta]$

El llamado *giro* hace referencia al ángulo de rotación de la sección transversal causada por la torsión a la que está sometida dicha sección.

Alabeo $[\theta']$

La distorsión de la sección transversal causada por desplazamientos longitudinales de sus puntos se denomina *alabeo* de la sección.

3.3.2. Esfuerzos propios de la torsión

Tradicionalmente se han considerado dos tipos de torsión: la denominada *torsión uniforme* o *torsión de Saint-Venant* y la *torsión no uniforme* o *torsión de alabeo*. Seguidamente se explican ambos tipos de torsión.

Torsión de Saint-Venant $[T_{SV}]$

Una pieza prismática está sometida a *torsión uniforme* o *de Saint-Venant* cuando el momento torsor que actúa es constante a lo largo de la misma y además los alabeos que se producen en las secciones rectas no tienen ninguna restricción que impida su libre movimiento.

Torsión de alabeo $[T_w]$

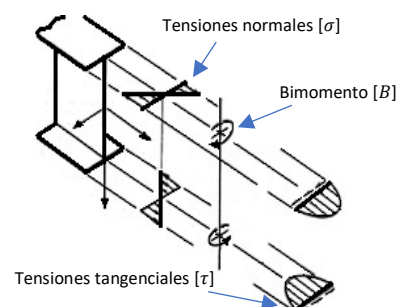
Sin embargo, si se considera la pieza anterior como parte de todo un conjunto estructural, los alabeos no serán en general libres, normalmente existirá algún tipo de restricción. De esta forma, los alabeos pueden dejar de ser uniformes a lo largo del eje de la pieza. Si dichos alabeos están restringidos aparecen unas tensiones normales $[\sigma]$ en la sección. Además de las tensiones normales, y como consecuencia de la variabilidad a lo largo del eje de la pieza, aparecerán también unas tensiones tangenciales $[\tau]$ que producirán las tensiones debidas a la *torsión de alabeo*.

Torsión total $[T]$

Naturalmente, la torsión total que actúa en una sección es la suma de la torsión uniforme y la torsión de alabeo. Es decir: $T = T_{SV} + T_w$.

Bimomento $[B]$

En general, un bimomento puede ser representado por un par de momentos de flexión iguales y opuestos. El bimomento surge al restringir el alabeo de la sección.



3.3.3. Analogía con la teoría elemental de la flexión

Debido a que la flexión se estudia en profundidad en las asignaturas de grado en Ingeniería Mecánica y otras ingenierías, puede resultar muy útil establecer una analogía entre la flexión y la torsión para mejor comprender mejor esta última.

Esta analogía se presenta a continuación en un resumen de las ecuaciones básicas de la teoría de flexión y de la teoría de la torsión de alabeo.

<i>Flexión</i>	<i>Torsión</i>
Inercia de flexión $I_{flexión} = \int y^2 dF$	Inercia de alabeo $I_w = \int w^2 dF$
Momento estático $S_{flexión} = \int y dF$	Momento estático $S_w = \int w dF$
Desviación $v(x)$	Giro $\theta(x)$
Giro $v'(x) = \frac{dv}{dx}$	Alabeo $\theta'(x) = \frac{d\theta}{dx}$
Momento flector $M = E \cdot I_f \cdot v''$	Bimomento $B = -E \cdot I_w \cdot \theta''$
Cortante $Q = -E \cdot I_f \cdot v'''$	Torsión de alabeo $T_w = -E \cdot I_w \cdot \theta'''$
EDO $E \cdot I \cdot y^{(iv)} = q$	EDO $E \cdot I \cdot \theta^{(iv)} = m$
Esfuerzo normal $\sigma_{flexión} = \frac{M}{I_f} \cdot y$	Esfuerzo normal $\sigma_w = \frac{B}{I_w} \cdot w$
Esfuerzo tangencial $\tau_{flexión} = \frac{Q \cdot S_f}{I_f \cdot \delta}$	Esfuerzo tangencial $\tau_w = \frac{T_w \cdot S_w}{I_w \cdot \delta}$
Carga uniforme q	Momento torsor uniforme m_T

Tabla 1: Resumen de la analogía entre la teoría de flexión y la teoría de torsión de alabeo.

Como se observa en la *Tabla 1*, la analogía entre la teoría de la flexión y la teoría de la torsión de alabeo consiste en el hecho que los factores básicos v , v' , M y Q que representan, en la teoría de la flexión, la desviación, el giro, el momento flector y el esfuerzo cortante, respectivamente, corresponden en la teoría de la torsión de alabeo a los factores básicos θ , θ' , B y T_w , los cuales representan el ángulo de torsión, el alabeo, el bimomento y la torsión de alabeo, respectivamente.

4. Desarrollo de los cálculos

4.1. Conceptos generales: torsión caso general

Para desarrollar los cálculos que más adelante implementaremos en el software nos basaremos en los fundamentos básicos elaborados por Stephen P. Timoshenko ⁽¹⁾ y en el desarrollo de la teoría de Vlasov ⁽²⁾, teoría perteneciente a V. Z. Vlasov.

Del desarrollo de Vlasov ⁽²⁾ se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la torsión de una viga de pared delgada:

$$E \cdot I_w \cdot \theta^{iv}) - G \cdot I_T \cdot \theta'' - m_T = 0 \quad (1)$$

En la cual:

- E , corresponde al módulo de Young.
- G , corresponde al módulo de cizalladura.
- I_w , corresponde a la inercia de alabeo.
- I_T , corresponde a la inercia de torsión uniforme.
- m_T , corresponde al momento torsor uniforme.
- $\theta^{iv})$ y θ'' , corresponden a derivadas del giro al que está sometido una viga.

En primer lugar, se considera la ecuación homogénea y por tanto sin momento torsor uniforme. Más adelante, el torsor uniforme se considerará como una carga interna y se obtendrán las reacciones de empotramiento perfecto para aplicar la metodología habitual del análisis matricial mediante el método de la rigidez.

$$E \cdot I_w \cdot \theta^{iv}) - G \cdot I_T \cdot \theta'' = 0 \quad (2)$$

A partir de la ecuación diferencial de la torsión general, se desarrollan tanto las matrices de rigidez, necesarias para implementarlas en el método directo de la rigidez de cálculo de estructuras hiperestáticas, como los ejemplos analíticos para poder realizar la verificación del software desarrollado.

Del desarrollo de Vlasov ⁽²⁾ también se obtienen las ecuaciones de las torsiones y el bimomento:

$$B(x) = -E \cdot I_w \cdot \theta'' \quad (3)$$

$$T_{sv}(x) = G \cdot I_T \cdot \theta' \quad (4)$$

$$T_w(x) = -E \cdot I_w \cdot \theta''' \quad (5)$$

4.2. EDO

Teniendo la ecuación homogénea ⁽²⁾:

$$E \cdot I_w \cdot \theta^{iv}) - G \cdot I_T \cdot \theta'' = 0 \quad (2)$$

Se sabe que es una ecuación diferencial lineal de orden 4 con coeficientes constantes, que se pueden representar de la siguiente forma:

$$a_4 \cdot y^{(4)} + a_2 \cdot y'' = 0$$

En la cual:

$$a_4 = E \cdot I_w$$

$$a_2 = -G \cdot I_T$$

$$y = \theta$$

Las soluciones de esta ecuación se pueden obtener a partir de la raíz del polinomio característico de la ecuación:

$$a_4 \cdot \lambda^4 + a_2 \cdot \lambda^2 = 0$$

Por lo tanto, queda:

$$E \cdot I_w \cdot \lambda^4 - G \cdot I_T \cdot \lambda^2 = 0$$

De la cual se obtienen las siguientes soluciones:

$$(E \cdot I_w \cdot \lambda^2 - G \cdot I_T) \cdot \lambda^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ E \cdot I_w \cdot \lambda^2 = G \cdot I_T \end{cases}$$

La solución general de la Ecuación 2 se puede escribir de la siguiente la forma ^[A3]:

$$\theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot x + C_4 \quad (6)$$

Cuyas derivadas son:

$$\theta'(x) = C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 \quad (7)$$

$$\theta''(x) = C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda x) \quad (8)$$

$$\theta'''(x) = C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda x) \quad (9)$$

$$\theta^{iv}(x) = C_1 \cdot \lambda^4 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^4 \cdot \cosh(\lambda x) \quad (10)$$

En las cuales, C_n representan las constantes de integración que dependen de las condiciones de contorno.

A partir de sustituir las derivadas, Ecuaciones 7, 8 y 9, en las Ecuaciones 3, 4 y 5 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{Bimomento} \quad \rightarrow \quad B(x) &= -E \cdot I_w \cdot \theta'' \\
 &= -E \cdot I_w \cdot [C_1 \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda x)] \\
 &= -E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot [C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x)] \\
 &= -E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot [\theta - C_3 \cdot x - C_4]
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Torsión de Saint-Venant} \quad \rightarrow \quad T_{sv}(x) &= G \cdot I_T \cdot \theta' \\
 &= G \cdot I_T \cdot [C_1 \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3] \\
 &= E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \\
 &\quad \cdot [C_1 \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3]
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Torsión de alabeo} \quad \rightarrow \quad T_w(x) &= -E \cdot I_w \cdot \theta''' \\
 &= -E \cdot I_w \cdot [C_1 \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda x)] \\
 &= -G \cdot I_T \cdot [C_1 \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \lambda \cdot \sinh(\lambda x)]
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\text{Torsión} \quad \rightarrow \quad T(x) = T_{sv}(x) + T_w(x) = G \cdot I_T \cdot C_3 = E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot C_3 \tag{14}$$

Para obtener las constantes las constantes de integración, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , se utilizará el caso de una viga continua de longitud L , como la que se muestra en la Figura 1.

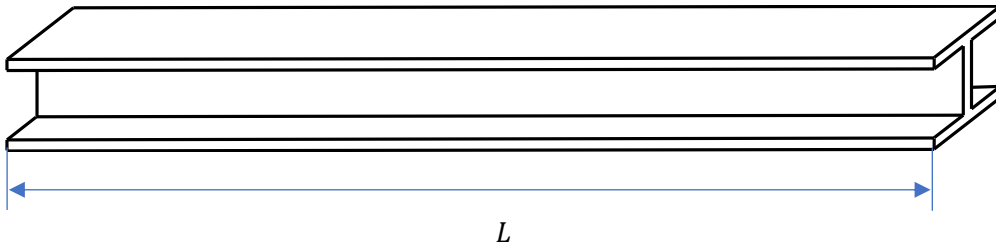


Figura 1: Viga continua de longitud L .

Las condiciones de contorno en los extremos de esta viga, es decir, en x igual a 0 y en x igual a L , se obtienen a partir de las ecuaciones del giro y el alabeo, Ecuaciones 6 y 7:

$$\theta(0) = C_2 + C_4 = \theta_1 \tag{15}$$

$$\theta'(0) = C_1 \cdot \lambda + C_3 = \theta'_1 \tag{16}$$

$$\theta(L) = C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) + C_3 \cdot L + C_4 = \theta_2 \tag{17}$$

$$\theta'(L) = C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 = \theta'_2 \tag{18}$$

Para resolver la ecuación se necesita la matriz $[A]$ que cumpla la siguiente ecuación:

$$[A] \cdot \underline{C} = \underline{\delta}^e \tag{19}$$

Donde \underline{C} es el vector que contiene las constantes de integración y $\underline{\delta}^e$ corresponde los desplazamientos de la viga.

Primero se despeja C_4 y C_3 en las ecuaciones 15 y 16, respectivamente:

$$\begin{aligned} C_4 &= \theta_1 - C_2 \\ C_3 &= \theta'_1 - C_1 \cdot \lambda \end{aligned}$$

Y se sustituyen en las Ecuaciones 17 y 18, es decir, en θ_2 y θ'_2 :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) + (\theta'_1 - C_1 \cdot \lambda) \cdot L + \theta_1 - C_2 \\ \theta'_2 &= C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + \theta'_1 - C_1 \cdot \lambda \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones se sustituyen en la Ecuación 19:

$$\begin{bmatrix} \sinh(\lambda L) - \lambda L & \cosh(\lambda L) - 1 \\ (\cosh(\lambda L) - 1) & \sinh(\lambda L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 - \theta'_1 \cdot L - \theta_1 \\ \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Se resuelve la Ecuación 20 usando la regla de Cramer ^[A4]. Primero, se obtiene el determinante de la matriz $[A]$:

$$\begin{aligned} D &= \sinh^2(\lambda L) - \lambda \cdot L \cdot \sinh(\lambda L) - (\cosh(\lambda L) - 1)^2 \\ &= \sinh^2(\lambda L) - \lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - \cosh^2(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 1 \\ &= -1 - L\lambda \cdot \sinh(L\lambda) + 2 \cdot \cosh(L\lambda) - 1 \\ &= -L\lambda \cdot \sinh(L\lambda) + 2 \cdot \cosh(L\lambda) - 2 \end{aligned} \quad (21)$$

A continuación, se sustituyen la primera columna de la matriz $[A]$ por la matriz $\underline{\delta}^e$:

$$\begin{bmatrix} \theta_2 - \theta'_1 \cdot L - \theta_1 & \cosh(\lambda L) - 1 \\ \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\lambda} & \sinh(\lambda L) \end{bmatrix}$$

Y se calcula el determinante de la matriz resultante:

$$\begin{aligned} D_{C_1} &= (\theta_2 - \theta'_1 \cdot L - \theta_1) \cdot \sinh(\lambda L) - \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\lambda} \cdot (\cosh(\lambda L) - 1) \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot [-\lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_1 + (-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_1 + \lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_2 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_2] \end{aligned} \quad (22)$$

Se realiza la misma operación con la segunda línea de la matriz $[A]$:

$$\begin{bmatrix} \sinh(\lambda L) - \lambda L & \theta_2 - \theta'_1 \cdot L - \theta_1 \\ (\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

Y se vuelve a calcular el determinante de la matriz resultante:

$$\begin{aligned} D_{C_2} &= (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\lambda} - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot (\theta_2 - \theta'_1 \cdot L - \theta_1) \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot [(\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \theta_1 + (\cosh(\lambda L) \cdot \lambda L - \sinh(\lambda L)) \cdot \theta'_1 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \theta_2 + (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \theta'_2] \end{aligned} \quad (23)$$

Con las Ecuaciones 21, 22 y 23, correspondientes a los determinantes D , D_{C_1} y D_{C_2} , se obtienen las constantes de integración:

$$C_1 = \frac{D_{C_1}}{D} = \frac{-\lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_1 + (-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_1 + \lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_2 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_2}{\lambda \cdot [-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \quad (24)$$

$$C_2 = \frac{D_{C_2}}{D} = \frac{(\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_1 + (\cosh(\lambda L) \cdot \lambda L - \sinh(\lambda L)) \cdot \theta'_1 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_2 + (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \theta'_2}{\lambda \cdot [-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} C_3 = \theta'_1 - C_1 \lambda &= \theta'_1 - \frac{-\lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_1 + (-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_1 + \lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_2 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_2}{[-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \\ &= \frac{\lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_1 + (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_1 - \lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_2 + (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_2}{[-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} C_4 = \theta_1 - C_2 &= \theta_1 - \frac{(\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_1 + (\cosh(\lambda L) \cdot \lambda L - \sinh(\lambda L)) \cdot \theta'_1 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_2 + (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \theta'_2}{\lambda \cdot [-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \\ &= \frac{(-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_1 - (\cosh(\lambda L) \cdot \lambda L - \sinh(\lambda L)) \cdot \theta'_1 + (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_2 - (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \theta'_2}{\lambda \cdot [-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \end{aligned} \quad (27)$$

Una vez obtenidas las constantes de integración, Ecuaciones 24, 25, 26 y 27, se sustituyen en las Ecuaciones 11, 12, 13 y 14, correspondientes a la torsión y el bimomento en los extremos de la viga, es decir, en x igual a 0 y en x igual a L :

$$T(0) = E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot C_3 = E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot \frac{-\lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_1 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_1 + \lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_2 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_2}{[-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \quad (28)$$

$$T(L) = E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot C_3 = E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot \frac{\lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_1 + (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_1 - \lambda \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta_2 + (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \theta'_2}{[-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \quad (29)$$

$$B(0) = E \cdot I_a \cdot \lambda^2 \cdot C_2 = -E \cdot I_a \cdot \lambda \cdot \frac{(\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_1 + (\cosh(\lambda L) \cdot \lambda L - \sinh(\lambda L)) \cdot \theta'_1 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \lambda \cdot \theta_2 + (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \theta'_2}{[-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B(L) &= -E \cdot I_a \cdot \lambda^2 \cdot [C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L)] \\ &= -E \cdot I_a \cdot \lambda^2 \cdot \left[\frac{-\lambda \cdot \sinh^2(\lambda L) \cdot \theta_1 + (-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L) - 1) \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta'_1 + \lambda \cdot \sinh^2(\lambda L) \cdot \theta_2 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \sinh(\lambda L) \cdot \theta'_2}{\lambda \cdot [-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \cosh(\lambda L) \cdot \lambda \cdot \theta_1 + (\cosh(\lambda L) \cdot \lambda L - \sinh(\lambda L)) \cdot \cosh(\lambda L) \cdot \theta'_1 - (\cosh(\lambda L) - 1) \cdot \cosh(\lambda L) \cdot \lambda \cdot \theta_2 + (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \cosh(\lambda L) \cdot \theta'_2}{\lambda \cdot [-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \right] \\ &= E \cdot I_a \cdot \lambda \cdot \frac{(1 - \cosh(\lambda L)) \cdot \lambda \cdot \theta_1 + (-\sinh(\lambda L) + \lambda L) \cdot \theta'_1 + \lambda \cdot (-1 + \cosh(\lambda L)) \cdot \theta_2 + (\sinh(\lambda L) - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)) \cdot \theta'_2}{[-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2]} \end{aligned} \quad (31)$$

4.3. Matriz de rigidez

A partir de las Ecuaciones 28, 29, 30 y 31 se puede construir la matriz de rigidez, K , siguiente:

$$\underline{R} = [K] \cdot \underline{\delta}$$

Donde \underline{R} corresponde a la torsión y el bimomento en los extremos de la viga y $\underline{\delta}$ a los desplazamientos en los extremos de la viga, por lo tanto, la ecuación resulta ser:

$$\begin{bmatrix} T(0) \\ B(0) \\ T(L) \\ B(L) \end{bmatrix} = [K] \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1' \\ \theta_2 \\ \theta_2' \end{bmatrix} \quad (32)$$

Se sustituyen las Ecuaciones 28, 29, 30 y 31 en la Ecuación 32. De esta manera, se obtiene la matriz de rigidez, para una viga continua de longitud L :

$$K = \frac{E \cdot I_a \cdot \lambda^2}{[\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot \cosh(\lambda L) + 2]} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \cdot \sinh(\lambda L) & (\cosh(\lambda L) - 1) & -\lambda \cdot \sinh(\lambda L) & (\cosh(\lambda L) - 1) \\ (\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\lambda L \cdot \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L)}{\lambda} & -\lambda \cdot (\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\sinh(\lambda L) - \lambda L}{\lambda} \\ -\lambda \cdot \sinh(\lambda L) & -(\cosh(\lambda L) - 1) & \lambda \cdot \sinh(\lambda L) & -(\cosh(\lambda L) - 1) \\ (\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\sinh(\lambda L) - \lambda L}{\lambda} & -(\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\lambda L \cdot \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L)}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (33.a)$$

Y al linealizar la matriz ^[A5] queda:

$$\frac{E \cdot I_a}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{G \cdot I_T}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (33.b)$$

4.4. Vector de cargas nodales

La Ecuación 32 solo se cumple si en la viga no existe un momento torsor uniforme, por tanto, para que se pueda utilizar dicha ecuación, cuando exista un momento torsor constante se considerará este como una carga interna, por tanto, la Ecuación 32 tendrá que incluir el vector de cargas nodales, \underline{F} , tal que así:

$$\underline{R} = [K] \cdot \underline{\delta} - \underline{F}$$

$$\begin{bmatrix} T(0) \\ B(0) \\ T(L) \\ B(L) \end{bmatrix} = [K] \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1' \\ \theta_2 \\ \theta_2' \end{bmatrix} - \underline{F} \quad (34)$$

Este vector de cargas nodales se obtendrá a partir de las reacciones de empotramiento perfecto, obtenidas del libro de Kollbrunner y Basel⁽³⁾, estas se muestran en la Figura 2.

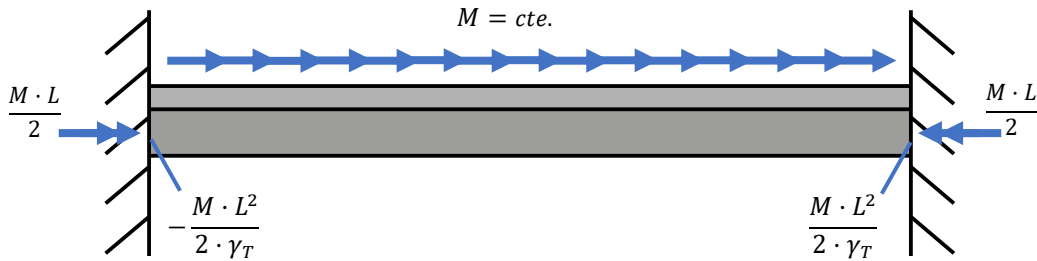


Figura 2: Viga empotrada por los dos extremos con sus reacciones.

Donde γ_T ⁽³⁾ es:

$$\gamma_T = \frac{(\lambda L)^2 \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)}{[\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)]}$$

Se sustituye el valor γ_T en la reacción:

$$-\frac{M \cdot L^2}{2 \cdot \gamma_T} = -\frac{M \cdot L^2}{2} \cdot \frac{\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)}{(\lambda L)^2 \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)} = M \cdot L^2 \cdot \left[-\frac{\sinh(\lambda L)}{2 \cdot \lambda L \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)} + \frac{1}{(\lambda L)^2} \right]$$

Por tanto, el vector de cargas nodales resulta ser:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{M \cdot L}{2} \\ M \cdot L^2 \cdot \left[-\frac{\sinh(\lambda L)}{2 \cdot \lambda L \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)} + \frac{1}{(\lambda L)^2} \right] \\ \frac{M \cdot L}{2} \\ -M \cdot L^2 \cdot \left[-\frac{\sinh(\lambda L)}{2 \cdot \lambda L \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)} + \frac{1}{(\lambda L)^2} \right] \end{bmatrix} \quad (35)$$

5. Programa para vigas continuas sometidas a torsión

Una vez obtenidas las constantes de integración y la matriz de rigidez, pasaremos al desarrollo del software. Para ello, hemos decidido programar el código del software en Visual Basic con la interfaz para la introducción de datos en Excel.


5.1. Interfaz

Primero desarrollamos lo que será la interfaz donde se introducirán los datos, en este caso la hoja de Excel.

Los datos que se deberán introducir serán los siguientes:

1. El número de nodos que tendrá la viga.
2. Las características del material de la viga ^[A1], es decir, el módulo de cizalladura y el módulo de Young, estos los introduciremos ambos en N/mm^2 .
3. Las propiedades de la sección de la viga ^[A2], es decir, la inercia de torsión y la inercia de alabeo, esos serán introducidos en mm^4 y mm^6 , respectivamente.
4. La longitud de la viga.
5. Las características de cada nodo, tanto las coordenadas de este como la torsión o el bimomento a los que está sometido.
6. Las condiciones en los nodos, es decir, si está o no restringido el giro y el alabeo.
7. El momento torsor constante al que está sometido cada elemento.

Creemos la interfaz, donde se puedan introducir los datos que necesitará el software, marcados en amarillo en la *Figura 3*.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

THIN-WALLED ELEMENT			
[Continuous Beams]			
Nº of nodes			
Nº of elements			
G	N/mm^2		
E	N/mm^2		
I_t	mm^4		
I_w	mm^6		

λ			
L	mm		
λL			

CALCULATE

Node	Coordinate	Nodal actions		Contour	
	x (mm)	T (kNm)	B (kNm ²)	θ	θ'

Element	Node 1	Node 2	m (kNm/m)

Figura 3: Interfaz del software.

5.2. Código del programa

A continuación, se explica lo que se realiza al introducir el valor de los nodos en la interfaz.

<pre>Private Sub Worksheet_Change(ByVal Target As Range) If Target.Row = 9 And Target.Column = 5 Then</pre>	<p>El comando se ejecuta cuando varía el valor de la celda, correspondiente al número de nodos de la viga que se desea calcular.</p>
<pre> Hoja1.Range("A23:L2000").ClearContents</pre>	<p>Se eliminan los valores que pueda haber en las tablas de datos.</p>
<pre> Dim NN As Integer, ii As Integer</pre>	
<pre> NN = Hoja1.Cells(9, 5)</pre>	<p>La variable "NN" será el valor que se introduzca en la celda correspondiente al número de nodos de la viga a calcular.</p>
<pre> Hoja1.Cells(10, 5) = NN - 1</pre>	<p>Se calcula el número de elementos, que será el número de nodos menos uno. Y se muestra el valor resultante en la celda correspondiente al número de elementos.</p>
<pre> For ii = 1 To NN Hoja1.Cells(22 + ii, 2) = ii Next ii</pre>	<p>En la tabla de datos, se muestra en la columna "Node" el número de nodo, del nodo 1 hasta el número de nodos entrado por el usuario.</p>
<pre> For ii = 1 To NN - 1 Hoja1.Cells(22 + ii, 9) = ii Hoja1.Cells(22 + ii, 10) = ii Hoja1.Cells(22 + ii, 11) = ii + 1 Next ii</pre>	<p>Se repite la operación con los elementos en la columna "Element". Así como, los nodos inicial y final de cada elemento en las columnas "Node 1" y "Node 2", respectivamente.</p>
<pre> End If</pre>	
<pre>End Sub</pre>	

A continuación, se explica lo que se realizará al apretar el botón “Calculate”.

Public Sub **THINWALLEDBEAM**()

Hoja2.Range("A3:L10000").ClearContents

Se eliminan los valores que pueda haber en las tablas de datos de la hoja de resultados.

Dim G As Double, E As Double, It As Double,
Ia As Double, L As Double

G = Hoja1.Cells(11, 5) * 1000000#

La variable “*G*” será el valor que se introduzca en la celda correspondiente al módulo de cizalladura. Como este se introduce en N/mm^2 se multiplica por 10^6 para pasarlo a N/m^2 .

E = Hoja1.Cells(12, 5) * 1000000#

La variable “*E*” será el valor que se introduzca en la celda correspondiente al módulo de Young. Como este se introduce en N/mm^2 se multiplica por 10^6 para pasarlo a N/m^2 .

It = Hoja1.Cells(13, 5) / 1000# ^ 4

La variable “*It*” será el valor que se introduzca en la celda correspondiente a la inercia de torsión. Como esta se introduce en cm^4 se divide por 10^{12} para pasarlo a m^4 .

Ia = Hoja1.Cells(14, 5) / 1000# ^ 6

La variable “*Ia*” será el valor que se introduzca en la celda correspondiente a la inercia de alabeo. Como esta se introduce en cm^6 se divide por 10^{18} para pasarlo a m^6 .

L = Hoja1.Cells(17, 5) / 1000#

La variable “*L*” será el valor que se introduzca en la celda correspondiente a la longitud de la viga. Como esta se introduce en mm se divide por 10^3 para pasarlo a m .

Dim NN As Integer

Dim X() As Double, T() As Double, B() As
Double

Dim idG() As Integer, idA() As Integer

NN = Hoja1.Cells(9, 5)

La variable “*NN*” será el valor que se introduzca en la celda correspondiente al número de nodos de la viga a calcular.

ReDim X(NN), T(NN), B(NN), idG(NN), idA(NN)

Los vectores “*X*”, “*T*” y “*B*” tendrán tantos valores como nodos tiene la viga.

Dim ii As Integer

```
For ii = 1 To NN
```

```
X(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 3) / 1000#
```

El vector “X” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “Coordinate”, que corresponden a las coordenadas de cada nodo. Como estos se introducen en mm se dividen por 10^3 para pasarlos a m .

```
T(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 4) * 1000#
```

El vector “T” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “T”, que corresponden a los valores de la tensión en cada nodo. Como estos se introducen en kNm se multiplican por 10^3 para pasarlos a Nm .

```
B(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 5) * 1000#
```

El vector “B” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “B”, que corresponden a los valores del bimomento en cada nodo. Como estos se introducen en kNm se multiplican por 10^3 para pasarlos a Nm .

```
idG(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 6)
```

El vector “idG” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “θ”, que corresponden a los valores de giro en cada nodo.

```
idA(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 7)
```

El vector “idA” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “θ’”, que corresponden a los valores de alabeo en cada nodo.

```
Next ii
```

```
Dim NE As Integer
```

```
NE = NN - 1
```

Se define la variable “NE” como entero, que corresponderá al número de elementos de la viga y cuyo valor será el número de nodos menos uno.

```
Dim node1() As Integer, node2() As Integer,  
mT() As Double
```

```
ReDim node1(NE), node2(NE), mT(NE)
```

Los vectores “node1”, “node2” y “mT” tendrán tantos valores como elementos tiene la viga.

```
For ii = 1 To NE
```

```
node1(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 10)
```

El vector “node1” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “Node 1”, que corresponden al número de nodo inicial de cada elemento.

```
node2(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 11)
```

El vector “node2” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “Node 2”, que corresponden al número de nodo final de cada elemento.

```
mT(ii) = Hoja1.Cells(22 + ii, 12) * 1000#
```

El vector “mT” estará formado por los valores que se introduzcan en la columna “m”, que corresponden a los valores de momento torsor al que está sometido cada elemento. Como estos se introducen en kNm/m se multiplican por 10^3 para pasarlos a Nm/m .

```
Next ii
```

```
Dim K() As Double, F() As Double
```

```
ReDim K(2 * NN, 2 * NN), F(2 * NN)
```

```
For ii = 1 To NN
```

```
    F(2 * ii - 1) = F(2 * ii - 1) + T(ii)
```

```
    F(2 * ii) = F(2 * ii) + B(ii)
```

```
Next ii
```

```
Dim Kexacta As Variant, Klineal As Variant,  
Kalabeo As Variant, Fe As Variant
```

```
Dim jj As Integer, jE As Integer, k1 As  
Integer, k2 As Integer
```

```
For jE = 1 To NE
```

```
    ii = node1(jE)
```

```
    jj = node2(jE)
```

```
    L = X(jj) - X(ii)
```

```
    Kalabeo = STIFFNESS_EIA(E, Ia, L)
```

```
    Klineal = STIFFNESS_GIT(G, It, L)
```

```
    For k1 = 1 To 4
```

```
        For k2 = 1 To 4
```

```
            Klineal(k1, k2) = Klineal(k1, k2) +  
            Kalabeo(k1, k2)
```

```
        Next k2
```

```
    Next k1
```

```
Kexacta = STIFFNESS(E, Ia, L, G, It)
```

```
Dim Ke(4, 4) As Double
```

Se define la variable “*K*” como una matriz con una cantidad del doble del número de nodos tanto de filas como de columnas. También se define el vector “*F*” con un número de valores el doble del número de nodos.

El vector “*F*” se compone de dos elementos en cada posición. La posición del vector hace referencia al nodo correspondiente y los elementos corresponden a la torsión y el bímomento de cada nodo. Quedando un vector como el siguiente:

$$F = \begin{bmatrix} T_1 \\ B_1 \\ T_2 \\ B_2 \\ \dots \\ T_{NN} \\ B_{NN} \end{bmatrix}$$

Se calcula la longitud de cada elemento a partir de las coordenadas del nodo inicial y final correspondientes.

Se obtiene la matriz de rigidez linealizada, *Ecuación 33.b*, a partir de la suma de las dos matrices que la forman. Estas dos matrices se obtienen a partir de las funciones STIFFNESS_EIA, que corresponde a la primera matriz, y STIFFNESS_GIT, que corresponde a la segunda matriz, que se explicarán más adelante.

Se obtiene la matriz de rigidez exacta, *Ecuación 33.a*, a partir de la función “STIFFNESS”, que se explicará más adelante.


```

For k1 = 1 To 4

    For k2 = 1 To 4

        Ke(k1, k2) = Kexacta(k1, k2)

        'Ke(k1, k2) = Klineal(k1, k2)

        'Ke(k1, k2) = Kalabeo(k1, k2)

    Next k2

Next k1

```

El software está programado de manera que se pueda modificar fácilmente la matriz que se desea utilizar para la resolución de los cálculos. De manera predeterminada se usará la matriz de rigidez exacta, *Ecuación 33*.

```

For k1 = 1 To 2

    For k2 = 1 To 2

        K(2 * ii - 2 + k1, 2 * ii - 2 + k2) =
        K(2 * ii - 2 + k1, 2 * ii - 2 + k2) +
        Ke(k1, k2)

        K(2 * ii - 2 + k1, 2 * jj - 2 + k2) =
        K(2 * ii - 2 + k1, 2 * jj - 2 + k2) +
        Ke(k1, 2 + k2)

        K(2 * jj - 2 + k1, 2 * ii - 2 + k2) =
        K(2 * jj - 2 + k1, 2 * ii - 2 + k2) +
        Ke(2 + k1, k2)

        K(2 * jj - 2 + k1, 2 * jj - 2 + k2) =
        K(2 * jj - 2 + k1, 2 * jj - 2 + k2) +
        Ke(2 + k1, 2 + k2)

    Next k2

Next k1

```

Se ensambla, elemento a elemento, la matriz de rigidez correspondiente al caso que se está calculando, el tamaño de la cual será proporcional al número de elementos que tenga la viga.

Ejemplo 1: Viga de 2 elementos.

La matriz de rigidez será:

$$K = \begin{bmatrix} Ke(1,1) & Ke(1,2) & Ke(1,3) & Ke(1,4) & 0 & 0 \\ Ke(2,1) & Ke(2,2) + Ke(1,1) & Ke(2,3) + Ke(1,2) & Ke(2,4) + Ke(1,3) & Ke(1,4) & 0 \\ Ke(3,1) & Ke(3,2) + Ke(2,1) & Ke(3,3) + Ke(2,2) + Ke(1,1) & Ke(3,4) + Ke(2,3) + Ke(1,2) & Ke(2,4) + Ke(1,3) & Ke(1,4) \\ Ke(4,1) & Ke(4,2) + Ke(3,1) & Ke(4,3) + Ke(3,2) + Ke(2,1) & Ke(4,4) + Ke(3,3) + Ke(2,2) & Ke(3,4) + Ke(2,3) & Ke(2,4) \\ 0 & Ke(4,1) & Ke(4,2) + Ke(3,1) & Ke(4,3) + Ke(3,2) & Ke(4,4) + Ke(3,3) & Ke(3,4) \\ 0 & 0 & Ke(4,1) & Ke(4,2) & Ke(4,3) & Ke(4,4) \end{bmatrix}$$

```
Fe = UNIFORMLOAD(mT(jE), E, Ia, L, G, It)
```

Se obtiene el vector de cargas nodales a partir de la función "UNIFORMLOAD", que se explicará más adelante.

```

F(2 * ii - 1) = F(2 * ii - 1) + Fe(1)

F(2 * ii) = F(2 * ii) + Fe(2)

F(2 * jj - 1) = F(2 * jj - 1) + Fe(3)

F(2 * jj) = F(2 * jj) + Fe(4)

```

Se ensambla, elemento a elemento, el vector de cargas nodales correspondiente al caso que se está calculando.

```
Next jE
```

```
Dim Nelim As Integer, Ind() As Integer
```

```
ReDim Ind(2 * NN)
```

```
Nelim = 0
```

```
For ii = 1 To NN
```

```
  If idG(ii) = 1 Then
```

```
    Nelim = Nelim + 1
```

```
    jj = 2 * ii - 1
```

```
    Ind(jj) = 1
```

```
  End If
```

```
  If idA(ii) = 1 Then
```

```
    Nelim = Nelim + 1
```

```
    jj = 2 * ii
```

```
    Ind(jj) = 1
```

```
  End If
```

```
Next ii
```

```
Dim Kred() As Double, Mred() As Double
```

```
ReDim Kred(2 * NN - Nelim, 2 * NN - Nelim),  
Mred(2 * NN - Nelim, 2 * NN - Nelim)
```

```
Dim A() As Double, BB() As Double
```

```
ReDim A(2 * NN - Nelim, 2 * NN - Nelim),  
BB(2 * NN - Nelim)
```

```
Dim i1 As Integer, i2 As Integer, j1 As  
Integer
```

Se harán las dos siguientes comprobaciones en cada nodo:

En el caso que en el nodo la celda correspondiente al giro, es decir, en la columna θ' , tenga un valor igual a 1, que significa que el giro está restringido en ese nodo, se inserta en el vector "Ind", en la fila impar correspondiente, el valor 1.

De manera paralela, se contabilizará mediante la variable "Nelim" la cantidad de veces que el nodo tiene restringido tanto el giro como el alabeo, es decir, cuando el valor de estos sea 1.

En el caso que en el nodo la celda correspondiente al alabeo, en la columna θ' , tenga un valor igual a 1, lo que significa que el alabeo está restringido en ese nodo, se inserta en el vector "Ind", en la fila par correspondiente, el valor 1.

Ejemplo 1: Viga de 2 elementos en que los dos extremos están empotrados, lo que significa que el giro y el alabeo están restringidos, teniendo en los nodos inicial y final un valor de 1, tanto en la columna " θ " como en la columna " θ' ".

El vector "Ind" sería:

$$Ind = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
i1 = 0
```

```
For ii = 1 To 2 * NN
```

```
  If Ind(ii) <> 1 Then
```

```
    i1 = i1 + 1: j1 = 0
```

```
    For jj = 1 To 2 * NN
```

```
      If Ind(jj) <> 1 Then
```

```
        j1 = j1 + 1
```

```
        A(i1, j1) = K(ii, jj)
```

```
        Kred(i1, j1) = K(ii, jj)
```

```
      End If
```

```
    Next jj
```

```
    BB(i1) = F(ii)
```

```
  End If
```

```
Next ii
```

```
Dim factor As Double
```

```
Dim D() As Double
```

```
ReDim D(2 * NN - Nelim)
```

A partir de los valores en los que el giro o el alabeo no están restringidos, es decir que su valor en la celda "idG" o "idA" es 0 se crea una matriz de rigidez reducida con un tamaño igual a el número de valores igual a 0 tanto de filas como de columnas, con los valores correspondientes a los de la matriz de rigidez original, es decir, la matriz "K".

Ejemplo 1: Continuando con el ejemplo anterior, en el que teníamos una viga de 2 elementos en que los dos extremos están empotrados.

Donde:

$$Ind = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El valor de "Kred" sería:

$$Kred = \begin{bmatrix} K(3,3) & K(3,4) \\ K(4,3) & K(4,4) \end{bmatrix}$$

Paralelamente, se crea un vector "BB" con los valores correspondientes a las cargas nodales en los nodos.

```

For i1 = 1 To 2 * NN - Nelim

    For i2 = i1 + 1 To 2 * NN - Nelim

        factor = A(i2, i1) / A(i1, i1)

        For j1 = i1 To 2 * NN - Nelim

            A(i2, j1) = A(i2, j1) - factor * A(i1, j1)

        Next j1

        BB(i2) = BB(i2) - factor * BB(i1)

    Next i2

Next i1

Dim sum As Double

For i1 = 2 * NN - Nelim To 1 Step -1

    sum = BB(i1)

    For j1 = 2 * NN - Nelim To i1 + 1 Step -1

        sum = sum - A(i1, j1) * D(j1)

    Next j1

    D(i1) = sum / A(i1, i1)

Next i1

Dim DD() As Double

i1 = 0

For ii = 1 To 2 * NN

    If Ind(ii) <> 1 Then

        i1 = i1 + 1

        DD(ii) = D(i1)

    Else

        DD(ii) = 0#

    End If

Next ii

```

Se aplica el algoritmo de Gauss de resolución de sistemas lineales. En este caso, la matriz del sistema siempre es simétrica y definida positiva, con elementos no nulos en la diagonal y, por tanto, no se prevén problemas numéricos en la resolución del sistema de ecuaciones con este método.

```
For ii = 1 To NN
```

```
    Hoja2.Cells(2 + ii, 2) = ii
```

```
    Hoja2.Cells(2 + ii, 3) = DD(2 * ii - 1)
```

```
    Hoja2.Cells(2 + ii, 4) = DD(2 * ii)
```

```
Next ii
```

Se muestra el valor de los nodos, con sus correspondientes desplazamientos de giro y de alabeo en "Results", la Hoja 2 del Excel.

```
Dim R() As Double
```

```
ReDim R(2 * NN)
```

```
For ii = 1 To 2 * NN
```

```
    R(ii) = 0#
```

```
    For jj = 1 To 2 * NN
```

```
        R(ii) = R(ii) + K(ii, jj) * DD(jj)
```

```
    Next jj
```

```
Next ii
```

Se obtiene las reacciones a partir de la Ecuación 32:

$$\underline{R} = [K] \cdot \underline{\delta}$$

```
For jE = 1 To NE
```

```
    ii = node1(jE)
```

```
    jj = node2(jE)
```

```
    Fe = UNIFORMLOAD(mT(jE), E, Ia, L, G, It)
```

```
    R(2 * ii - 1) = R(2 * ii - 1) - Fe(1)
```

```
    R(2 * ii) = R(2 * ii) - Fe(2)
```

```
    R(2 * jj - 1) = R(2 * jj - 1) - Fe(3)
```

```
    R(2 * jj) = R(2 * jj) - Fe(4)
```

```
Next jE
```

La función "UNIFORMLOAD" proporciona las reacciones del empotramiento perfecto, está se detalla más adelante.

Una vez obtenidas, se superponen a las reacciones del matricial las reacciones del empotramiento perfecto, cumpliendo la Ecuación 34:

$$\underline{R} = [K] \cdot \underline{\delta} - \underline{F}$$

Dando como resultado la obtención de la torsión y el bimomento de cada nodo.

```
For ii = 1 To NN
```

```
    Hoja2.Cells(2 + ii, 5) = R(2 * ii - 1) / 1000#
```

```
    Hoja2.Cells(2 + ii, 6) = R(2 * ii) / 1000#
```

```
Next ii
```

Se muestra en la hoja de resultados del Excel, los valores de la torsión, en kNm , y del bimomento, en kNm^2 , de cada nodo.

```
Dim LAMBDA As Double, fila As Integer, XT As Double, I As Integer
```

```
Dim BX As Double, TSVX As Double, TWX As Double, TX As Double, XX As Double, LambdaX As Double
```

```
LAMBDA = Sqr(G * It / E / Ia): fila = 3
```

```
For jE = 1 To NE
```

```
    L = X(node2(jE)) - X(node1(jE))
```

```
    XT = X(node1(jE))
```

```
    Dim Dloc(4) As Double, n1 As Integer, n2  
    As Integer
```

```
    n1 = node1(jE): n2 = node2(jE)
```

```
    Dloc(1) = DD(2 * n1 - 1): Dloc(2) = DD(2 * n1)
```

```
    Dloc(3) = DD(2 * n2 - 1): Dloc(4) = DD(2 * n2)
```

```
    Dim C As Variant
```

```
    C = Coeficientes(E, Ia, L, G, It, Dloc)
```

Se obtiene la longitud de cada elemento a partir de las coordenadas inicial y final de los nodos que lo forman.

Se obtienen los desplazamientos, de giro y alabeo, del inicio y final de cada elemento, es decir, θ_1 , θ'_1 , θ_2 y θ'_2 .

A partir de la longitud, los desplazamientos y de E , I_w , G y I_T , introducidos previamente en el software, se obtienen los valores de las constantes de integración, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , mediante la función "Coeficientes", detallada más adelante.

```
For I = 0 To 10
```

```
    XX = Cdbl(I) / 10# * L
```

```
    LambdaX = LAMBDA * XX
```

```
    BX = -E * Ia * LAMBDA * LAMBDA * (C(1) *  
    SH(LAMBDA * XX) + C(2) * CH(LAMBDA * XX))
```

```
    TSVX = G * It * (C(1) * LAMBDA * CH(LAMBDA *  
    XX) + C(2) * LAMBDA * SH(LAMBDA * XX) + C(3))
```

```
    TWX = -E * Ia * LAMBDA ^ 3 * (C(1) *  
    CH(LAMBDA * XX) + C(2) * SH(LAMBDA * XX))
```

```
    TX = E * Ia * LAMBDA * LAMBDA * C(3)
```

Para cada elemento, se obtienen los esfuerzos: torsión uniforme, torsión de alabeo, torsión total y bimomento, en los extremos inicio y final y en nueve puntos interiores equidistantes.

```
    Hoja2.Cells(fila, 8) = (XT + XX) * 1000#
```

```
    Hoja2.Cells(fila, 9) = TSVX / 1000#
```

```
    Hoja2.Cells(fila, 10) = TWX / 1000#
```

```
    Hoja2.Cells(fila, 11) = TX / 1000#
```

```
    Hoja2.Cells(fila, 12) = BX / 1000#
```

Se muestran los resultados en la Hoja 2, "Results", de los esfuerzos de los 11 puntos de cada elemento, es decir, los extremos inicial y final y nueve puntos interiores.

```
    fila = fila + 1
```

```
Next I
```

```
Next jE
```

```
End Sub
```

5.2.1. Código de las funciones del programa

Función "CH"

```
Private Function CH(X As Double) As Double

    CH = (Exp(X) + Exp(-X)) / 2#

End Function
```

Función para calcular el coseno hiperbólico de X.

Función "SH"

```
Private Function SH(X As Double) As Double

    SH = (Exp(X) - Exp(-X)) / 2#

End Function
```

Función para calcular el seno hiperbólico de X.

Función "Coeficientes"

La función "Coeficientes" se encarga de añadir al código las constantes de integración.

```
Private Function Coeficientes(E, Ia, L, G, It, Dloc) As Variant
```

```
    Dim C(4) As Double, LAMBDA As Double,
    LambdaL As Double, CHL As Double, SHL As Double
```

```
LAMBDA = Sqr(G * It / E / Ia)
```

Se asigna a la variable "LAMBDA" el valor de λ , es decir:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_w}}$$

```
LambdaL = LAMBDA * L
```

Se asigna a la variable "LambdaL" el valor de la multiplicación de λ por L.

```
SHL = SH(LambdaL)
```

Se asigna a la variable "SHL" el valor del seno hiperbólico de λL .

```
CHL = CH(LambdaL)
```

Se asigna a la variable "CHL" el valor del coseno hiperbólico de λL .

```
Dim D As Double
```

```
D = (2# * (CHL - 1#) - LambdaL * SHL)
```

Se asigna a la variable "D" el valor del determinante de la matriz [A], Ecuación 21.

```
C(1) = (-LAMBDA * SHL * Dloc(1) + (CHL - 1# - LambdaL * SHL) * Dloc(2) + LAMBDA * SHL * Dloc(3) - (CHL - 1#) * Dloc(4)) / D / LAMBDA
```

Se asigna a la variable "C(1)" el valor del determinante de la constante de integración 1, C_1 , Ecuación 24.

```
C(2) = (LAMBDA * (CHL - 1#) * Dloc(1) + (LambdaL * CHL - SHL) * Dloc(2) - LAMBDA * (CHL - 1#) * Dloc(3) + (SHL - LambdaL) * Dloc(4)) / D / LAMBDA
```

Se asigna a la variable "C(2)" el valor del determinante de la constante de integración 2, C_2 , Ecuación 25.

```
C(3) = (LAMBDA * SHL * Dloc(1) + (CHL - 1#) * Dloc(2) - LAMBDA * SHL * Dloc(3) + (CHL - 1#) * Dloc(4)) / D
```

Se asigna a la variable "C(3)" el valor del determinante de la constante de integración 3, C_3 , Ecuación 26.

```
C(4) = (LAMBDA * (CHL - 1# - LambdaL * SHL) * Dloc(1) - (LambdaL * CHL - SHL) * Dloc(2) + LAMBDA * (CHL - 1#) * Dloc(3) - (SHL - LambdaL) * Dloc(4)) / D / LAMBDA
```

Se asigna a la variable "C(4)" el valor del determinante de la constante de integración 4, C_4 , Ecuación 27.

```
Coeficientes = C
```

```
End Function
```

Función “STIFFNESS”

La función “STIFFNESS” se encarga de crear la matriz de rigidez.

Private Function **STIFFNESS**(E, Ia, L, G, It) As Variant

Dim K(4, 4) As Double, LAMBDA As Double,
LambdaL As Double, SHL As Double, CHL As Double

LAMBDA = Sqr(G * It / E / Ia)

LambdaL = LAMBDA * L

SHL = SH(LambdaL)

CHL = CH(LambdaL)

K(1, 1) = LAMBDA * LAMBDA * SHL

K(1, 2) = LAMBDA * (CHL - 1#)

K(1, 3) = -K(1, 1)

K(1, 4) = K(1, 2)

K(2, 1) = K(1, 2)

K(2, 2) = LambdaL * CHL - SHL

K(2, 3) = -K(1, 2)

K(2, 4) = SHL - LambdaL

K(3, 1) = K(1, 3)

K(3, 2) = K(2, 3)

K(3, 3) = K(1, 1)

K(3, 4) = -K(1, 4)

K(4, 1) = K(1, 4)

K(4, 2) = K(2, 4)

K(4, 3) = K(3, 4)

K(4, 4) = K(2, 2)

Dim D As Double

D = 2# * (1# - CHL) + LambdaL * SHL

Dim ii As Integer, jj As Integer

For ii = 1 To 4

For jj = 1 To 4

K(ii, jj) = K(ii, jj) * E * Ia * LAMBDA / D

Next jj

Next ii

STIFFNESS = K

End Function

Se asigna a la variable “LAMBDA” el valor de λ , es decir:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_w}}$$

Se asigna a la variable “LambdaL” el valor de la multiplicación de λ por L .

Se asigna a la variable “SHL” el valor del seno hiperbólico de λL .

Se asigna a la variable “CHL” el valor del coseno hiperbólico de λL .

Se crea la matriz de rigidez K , Ecuación 33.a. Primero la parte:

$$\begin{bmatrix} \lambda \cdot \sinh(\lambda L) & \frac{(\cosh(\lambda L) - 1)}{\lambda L \cdot \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L)} & -\lambda \cdot \sinh(\lambda L) & \frac{(\cosh(\lambda L) - 1)}{\sinh(\lambda L) - \lambda L} \\ (\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\lambda}{\lambda L \cdot \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L)} & -\lambda \cdot (\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\lambda}{\sinh(\lambda L) - \lambda L} \\ -\lambda \cdot \sinh(\lambda L) & -\frac{(\cosh(\lambda L) - 1)}{\lambda L \cdot \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L)} & \lambda \cdot \sinh(\lambda L) & -\frac{(\cosh(\lambda L) - 1)}{\sinh(\lambda L) - \lambda L} \\ (\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\sinh(\lambda L) - \lambda L}{\lambda L \cdot \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L)} & -(\cosh(\lambda L) - 1) & \frac{\lambda L \cdot \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L)}{\lambda} \end{bmatrix}$$

Para después multiplicarla por:

$$\frac{E \cdot I_a \cdot \lambda^2}{D}$$

Donde la variable “D” corresponde al valor del determinante de la matriz $[A]$, Ecuación 21:

$$D = \lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot \cosh(\lambda L) + 2$$

Función “UNIFORMLOAD”

La función “UNIFORMLOAD” se encarga de crear el vector de cargas nodales.

```
Private Function UNIFORMLOAD (M, E, Ia, L, G,
It) As Variant
```

```
    Dim F(4) As Double, LAMBDA As Double,
    LambdaL As Double, CHL As Double, SHL As
    Double
```

```
LAMBDA = Sqr(G * It / E / Ia)
```

Se asigna a la variable “*LAMBDA*” el valor de λ , es decir:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_w}}$$

```
LambdaL = LAMBDA * L
```

Se asigna a la variable “*LambdaL*” el valor de la multiplicación de λ por L .

```
SHL = SH(LambdaL)
```

Se asigna a la variable “*SHL*” el valor del seno hiperbólico de λL .

```
CHL = CH(LambdaL)
```

Se asigna a la variable “*CHL*” el valor del coseno hiperbólico de λL .

```
F(1) = M * L / 2#
```

```
F(2) = (M * L ^ 2) * (1 / (LambdaL *
LambdaL) - (SHL / (2 * LambdaL * (CHL -
1#))))
```

Se crea el vector de cargas nodales, *Ecuación 35*, es decir:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{M \cdot L}{2} \\ M \cdot L^2 \cdot \left[-\frac{\sinh(\lambda L)}{2 \cdot \lambda L \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)} + \frac{1}{(\lambda L)^2} \right] \\ \frac{M \cdot L}{2} \\ -M \cdot L^2 \cdot \left[-\frac{\sinh(\lambda L)}{2 \cdot \lambda L \cdot (\cosh(\lambda L) - 1)} + \frac{1}{(\lambda L)^2} \right] \end{bmatrix}$$

```
F(3) = M * L / 2#
```

```
F(4) = (-M * L ^ 2) * (1 / (LambdaL *
LambdaL) - (SHL / (2 * LambdaL * (CHL -
1#))))
```

```
UNIFORMLOAD = F
```

```
End Function
```

Funciones “STIFFNESS_EIA” y “STIFFNESS_GIT”

Private Function **STIFFNESS_EIA**(E, Ia, L) As Variant

```
Dim K(4, 4) As Double
K(1, 1) = 12#
K(1, 2) = 6# * L
K(1, 3) = -12#
K(1, 4) = 6# * L
K(2, 1) = 6# * L
K(2, 2) = 4# * L ^ 2
K(2, 3) = -6# * L
K(2, 4) = 2# * L ^ 2
K(3, 1) = -12#
K(3, 2) = -6# * L
K(3, 3) = 12#
K(3, 4) = -6# * L
K(4, 1) = 6# * L
K(4, 2) = 2# * L ^ 2
K(4, 3) = -6# * L
K(4, 4) = 4# * L ^ 2
Dim ii As Integer, jj As Integer
For ii = 1 To 4
    For jj = 1 To 4
        K(ii, jj) = K(ii, jj) * E * Ia / L ^ 3
    Next jj
Next ii
STIFFNESS_EIA = K
```

End Function

Se crea la primera parte de la Ecuación 33.b, es decir:

$$\frac{E \cdot I_a}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Private Function **STIFFNESS_GIT**(G, It, L) As Variant

```
Dim K(4, 4) As Double
K(1, 1) = 36#
K(1, 2) = 3# * L
K(1, 3) = -36#
K(1, 4) = 3# * L
K(2, 1) = 3# * L
K(2, 2) = 4# * L ^ 2
K(2, 3) = -3# * L
K(2, 4) = -L ^ 2
K(3, 1) = -36#
K(3, 2) = -3# * L
K(3, 3) = 36#
K(3, 4) = -3# * L
K(4, 1) = 3# * L
K(4, 2) = -L ^ 2
K(4, 3) = -3# * L
K(4, 4) = 4# * L ^ 2
Dim ii As Integer, jj As Integer
For ii = 1 To 4
    For jj = 1 To 4
        K(ii, jj) = K(ii, jj) * G * It / 30# / L
    Next jj
Next ii
STIFFNESS_GIT = K
```

End Function

Se crea la segunda parte de la Ecuación 33.b, es decir:

$$\frac{G \cdot I_T}{30L} \cdot \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

5.3. Resultados

Los resultados obtenidos a partir de la ejecución del software se mostrarán en la Hoja 2 de la interfaz de Excel, llamada “Results”, de tres maneras como se puede observar en la *Figura 4*.



Figura 4: Interfaz de los resultados del software.

El primer conjunto de resultados se muestra en la primera tabla, correspondiente a la *Figura 5*, en esta se muestran los resultados del software de los desplazamientos, de torsión y bimomento en cada uno de los nodos de la viga.

[illegible]

Figura 5: Tablas de los resultados en los nodos del software.

El siguiente conjunto de resultados se muestra en la segunda tabla, correspondiente a la *Figura 6*, en esta tabla se muestra, para cada elemento, once coordenadas equidistantes: dos en los extremos del elemento y nueve puntos interiores. Para cada coordenada, se muestra la torsión de Saint-Venant, la torsión de alabeo, la torsión total, resultado de la suma de las dos anteriores, y el bimomento a la que está sometida.

[illegible]

Figura 6: Tabla de los resultados del software en las coordenadas a lo largo de la viga.

Por último, se muestra una gráfica, correspondiente a la *Figura 7*, con los resultados de la segunda tabla, *Figura 6*, esta es la representación gráfica de las torsiones y bimomento a las que está sometida la viga a lo largo de esta.

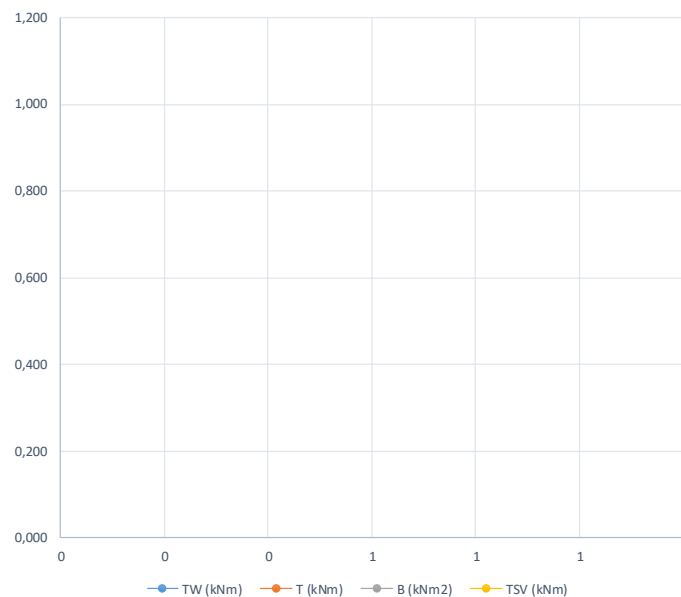


Figura 7: Representación gráfica de las torsiones y el bimomento a lo largo de la viga.

6. Verificación del software

Una vez desarrollado el software, se realizarán las comprobaciones necesarias para verificar su correcto funcionamiento. Para la verificación se ha elegido realizar dos pruebas diferentes:

- La primera prueba, consiste en la creación de cuatro casos particulares, más adelante detallados, y en la comprobación de que los resultados de los casos particulares corresponden a los resultados del software una vez introducidos los datos propios de cada caso.
- La segunda prueba, consiste en introducir en el software los mismos datos que un ejercicio resuelto, obtenido del libro de Kollbrunner y Basler⁽⁴⁾, y comprobar que ambos resultados coinciden.

Una vez realizadas estas dos comprobaciones se podrá determinar si el software funciona debidamente.

6.1. Casos particulares para verificar el programa

Para comprobar que el programa funciona correctamente se desarrollará la solución exacta de cuatro casos particulares. Es decir, se obtendrán las constantes de integración, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , de cada uno de cuatro casos particulares siguientes:

1. Viga continua con los dos extremos empotrados.
2. Viga continua con los dos extremos apoyados en una horquilla
3. Viga continua con uno de los extremos empotrado y el otro libre.
4. Viga continua con uno de los extremos apoyado en una horquilla y el otro libre.

6.1.1. Desarrollo de los cálculos

El desarrollo de los cálculos se empieza a partir del conocimiento de que una viga sometida a un momento torsor constante cumple la siguiente ecuación diferencial ordinaria ⁽²⁾:

$$E \cdot I_w \cdot \theta^{iv} - G \cdot I_T \cdot \theta'' = m_T \quad (36)$$

A partir de esta ecuación se puede crear la ecuación general resultado de la suma de la ecuación homogénea y la ecuación polinómica.

Para obtener la ecuación homogénea se siguen los mismos pasos que en el desarrollo de los cálculos del software:

$$E \cdot I_w \cdot \lambda^4 = 0 \rightarrow (E \cdot I_w \cdot \lambda^2 - G \cdot I_T) \cdot \lambda^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ E \cdot I_w \cdot \lambda^2 = G \cdot I_T \end{cases}$$

Se obtiene la ecuación homogénea:

$$[H] \quad \theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda \cdot x + C_4 \quad (37)$$

Para la ecuación polinómica se elige una ecuación polinómica de segundo grado cuya incógnita x desaparezca en la segunda derivada y cuya derivada cuarta dé cero. Dicha ecuación será la siguiente:

$$\theta_p = A \cdot x^2$$

Una vez obtenida esta ecuación y sabiendo sus derivadas, se sustituyen en la *Ecuación 36*:

$$0 - G \cdot I_T \cdot A \cdot 2 = m_T$$

Lo que nos da la ecuación polinómica:

$$[P] \quad A = -\frac{m_T}{2 \cdot G \cdot I_T} \quad (38)$$

El resultado de la suma de la ecuación homogénea, *Ecuación 37*, y la ecuación polinómica, *Ecuación 38*, será la ecuación general:

$$[G] \quad \theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda \cdot x + C_4 - \frac{m_T}{2 \cdot G \cdot I_T} \cdot x^2 \quad (39)$$

Como C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes, se puede sacar factor común, tal que:

$$[G] \quad \theta(x) = \left[C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda \cdot x + C_4 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot x^2 \right] \cdot \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \quad (40)$$

Con la ecuación general ya obtenida, se calculan sus derivadas:

$$\theta'(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot x] \quad (41)$$

$$\theta''(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda x) - \lambda^2] \quad (42)$$

$$\theta'''(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda x)] \quad (43)$$

Sustituyendo las derivadas, Ecuaciones 41, 42 y 43, en las Ecuaciones 3, 4 y 5, se obtiene:

- Torsión de alabeo:

$$\begin{aligned} T_w = -E \cdot I_w \cdot \theta''' &= -E \cdot I_w \cdot \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda x)] \\ &= -\frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x)] \end{aligned} \quad (44)$$

- Torsión de Saint-Venant:

$$\begin{aligned} T_{SV} = G \cdot I_T \cdot \theta' &= G \cdot I_T \cdot \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot x] \\ &= \frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 - \lambda \cdot x] \end{aligned} \quad (45)$$

- Torsión total, sumando la torsión de alabeo y la torsión de Saint-Venant:

$$\begin{aligned} T = T_w + T_{SV} &= \frac{m_T}{\lambda} \cdot (-[C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x)] + [C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 - \lambda \cdot x]) \\ &= \frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_3 - \lambda \cdot x] \end{aligned} \quad (46)$$

- Bimomento:

$$\begin{aligned} B = -E \cdot I_w \cdot \theta'' &= -E \cdot I_w \cdot \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda x) - \lambda^2] \\ &= -\frac{m_T}{\lambda^2} \cdot [C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) - 1] \end{aligned} \quad (47)$$

1) Caso Particular 1

Para el Caso Particular 1, se determina que la viga continua a analizar se encuentra empotrada en sus dos extremos, como se muestra en la *Figura 8*.

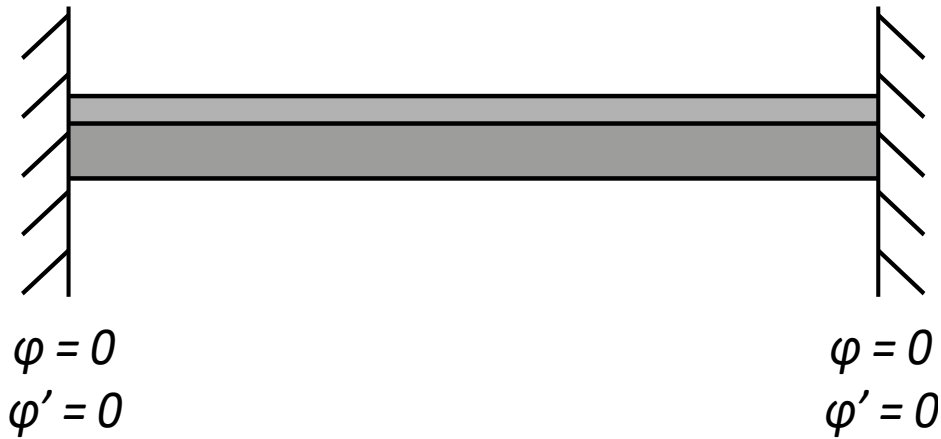


Figura 8: Representación del Caso Particular 1.

Por tanto, en los extremos el giro y el alabeo están restringidos, por lo que:

$$\theta(0) = \theta'(0) = \theta(L) = \theta'(L) = 0$$

Las funciones que se utilizarán para este caso serán las *Ecuaciones 40 y 41*:

$$\theta(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot \left[C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda \cdot x + C_4 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot x^2 \right] \quad (40)$$

$$\theta'(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot x] \quad (41)$$

Se sustituyen en las *Ecuaciones 40 y 41* el valor de la x por 0, lo que da las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_2 + C_4] = 0 \\ \rightarrow C_2 + C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \theta'(0) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda + C_3 \cdot \lambda] = 0 \\ \rightarrow C_1 + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

A continuación, se sustituye en la *Ecuación 40* el valor de la x por L :

$$\begin{aligned} \theta(L) &= \left[C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda L + C_4 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot L^2 \right] = 0 \\ \rightarrow C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) - C_1 \cdot \lambda L - C_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\lambda L)^2 \end{aligned} \quad (50)$$

Seguidamente, se repite la operación con la Ecuación 41:

$$\begin{aligned}\theta'(L) &= [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot L] = 0 \\ \rightarrow C_1 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \sinh(\lambda L) - C_1 &= \lambda \cdot L\end{aligned}\quad (51)$$

Para resolver las incógnitas, C_1 y C_2 , se usa la regla de Cramer ^[A4] en estas dos ecuaciones, la Ecuación 50 y la Ecuación 51.

$$\begin{bmatrix} \sinh(\lambda L) - \lambda L & \cosh(\lambda L) - 1 \\ \cosh(\lambda L) - 1 & \sinh(\lambda L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (\lambda L)^2 \\ \lambda L \end{bmatrix}$$

Primero se calcula el determinante de la primera matriz:

$$\begin{aligned}D &= (\sinh(\lambda L) - \lambda L) \cdot \sinh(\lambda L) - (\cosh(\lambda L) - 1)^2 \\ &= \sinh^2(\lambda L) - \lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - \cosh^2(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 1 \\ &= -\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2\end{aligned}\quad (52)$$

A continuación, se sustituye la primera columna de la matriz por la matriz resultante y se calcula el determinante de esta nueva matriz:

$$\begin{aligned}D_{C_1} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot (\lambda L)^2 & \cosh(\lambda L) - 1 \\ \lambda L & \sinh(\lambda L) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\lambda L)^2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L \cdot (\cosh(\lambda L) - 1) \\ &= \frac{\lambda L}{2} \cdot [\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot \cosh(\lambda L) + 2]\end{aligned}\quad (53)$$

Seguidamente se repite la operación, pero esta vez sustituyendo la segunda columna de la matriz por la matriz resultante y se calcula el determinante de esta nueva matriz:

$$\begin{aligned}D_{C_2} &= \begin{vmatrix} \sinh(\lambda L) - \lambda L & \frac{1}{2} \cdot (\lambda L)^2 \\ \cosh(\lambda L) - 1 & \lambda L \end{vmatrix} \\ &= \lambda L \cdot (\sinh(\lambda L) - \lambda L) - \frac{1}{2} \cdot (\lambda L)^2 \cdot (\cosh(\lambda L) - 1) \\ &= \frac{\lambda L}{2} \cdot [2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]\end{aligned}\quad (54)$$

Siguiendo la regla de Cramer ^[A4], y con las Ecuaciones 52, 53 y 54, correspondientes a los determinantes D , D_{C_1} y D_{C_2} , se obtienen las constantes de integración, C_1 y C_2 :

$$C_1 = \frac{D_{C_1}}{D} = \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot \cosh(\lambda L) + 2]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2} = -\frac{\lambda L}{2} \quad (55)$$

$$C_2 = \frac{D_{C_2}}{D} = \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2} \quad (56)$$

Y teniendo en cuenta las Ecuaciones 48 y 49 se obtienen las constantes de integración, C_3 y C_4 :

$$C_3 = -C_1 = \frac{\lambda L}{2} \quad (57)$$

$$C_4 = -C_2 = -\frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2} \quad (58)$$

Una vez obtenidas las constantes de integración, Ecuación 55, 56, 57 y 58, se sustituyen en las Ecuaciones 44, 45, 46 y 47:

- La torsión de alabeo:

$$\begin{aligned} T_w &= -\frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x)] \\ &= \frac{m_T}{\lambda} \cdot \left[\frac{\lambda L}{2} \cdot \cosh(\lambda x) - \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2} \cdot \sinh(\lambda x) \right] \end{aligned}$$

- La torsión de Saint-Venant:

$$\begin{aligned} T_{SV} &= \frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 - \lambda x] \\ &= \frac{m_T}{\lambda} \cdot \left[-\frac{\lambda L}{2} \cdot \cosh(\lambda x) + \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2} \cdot \sinh(\lambda x) + \frac{\lambda L}{2} - \lambda x \right] \end{aligned}$$

- La torsión total combinando la torsión de alabeo y la torsión de Saint-Venant:

$$T = T_w + T_{SV} = \frac{m_T}{\lambda} \cdot \left[\frac{\lambda L}{2} - \lambda \cdot x \right]$$

- El bimomento:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{m_T}{\lambda^2} \cdot [C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) - 1] \\ &= -\frac{m_T}{\lambda^2} \cdot \left[-\frac{\lambda L}{2} \cdot \sinh(\lambda x) + \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2} \cdot \cosh(\lambda x) - 1 \right] \end{aligned}$$

Esto es un ejemplo de cómo se obtendrían las torsiones y bimomento de cada caso, pero en el software se implementarán las Ecuaciones 44, 45, 46 y 47 y el software directamente se sustituye las constantes de integración, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , de cada caso particular.

2) Caso Particular 2

Para el Caso Particular 2, se determina que la viga continua a analizar se encuentra en sus dos extremos apoyada en una horquilla, como se muestra en la *Figura 9*.

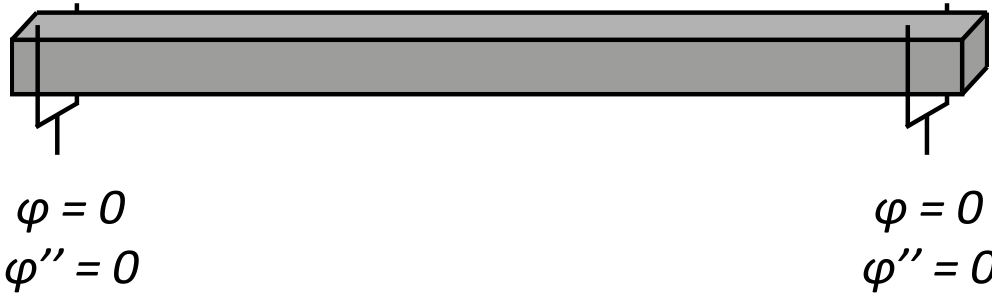


Figura 9: Representación del Caso Particular 2.

Por tanto, en ambos extremos el giro está restringido y el bimomento también será nulo, pero sí se podrá producir alabeo, por lo que este no será nulo, por lo que:

$$\theta(0) = \theta''(0) = \theta(L) = \theta''(L) = 0$$

Para este caso, se utilizarán las *Ecuaciones 40 y 42*, que son las siguientes:

$$\theta(x) = \left[C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda \cdot x + C_4 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot x^2 \right] \cdot \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \quad (40)$$

$$\theta''(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda x) - \lambda^2] \quad (42)$$

Se sustituyen en las *Ecuaciones 40 y 42* el valor de x por 0, y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_2 + C_4] = 0 \\ \rightarrow C_2 + C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \theta''(0) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_2 \cdot \lambda^2 - \lambda^2] = 0 \\ \rightarrow C_2 &= 1 \end{aligned} \quad (60)$$

Se sustituye la *Ecuación 59* en la *Ecuación 60*, para obtener C_4 :

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ \rightarrow C_4 &= -1 \end{aligned} \quad (61)$$

A continuación, se sustituye en la Ecuación 40 el valor de x por L :

$$\begin{aligned}\theta(L) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot \left[C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda \cdot L + C_4 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot L^2 \right] = 0 \\ \rightarrow C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda \cdot L - 1 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot L^2 &= 0 \\ \rightarrow C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda \cdot L &= \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot L^2 + 1 - \cosh(\lambda L)\end{aligned}\quad (62)$$

Seguidamente, se repite la operación en la Ecuación 42:

$$\begin{aligned}\theta''(L) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda L) - \lambda^2] = 0 \\ \rightarrow [C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L) - 1] \cdot \lambda^2 &= 0 \\ \rightarrow C_1 \cdot \sinh(\lambda L) &= 1 - \cosh(\lambda L) \\ \rightarrow C_1 &= \frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)}\end{aligned}\quad (63)$$

Sustituyendo el valor de C_1 , Ecuación 63, en la Ecuación 62, se obtiene el valor de la constante de integración, C_3 :

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)} \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda \cdot L &= \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot L^2 + 1 - \cosh(\lambda L) \\ \rightarrow 1 - \cosh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda \cdot L &= \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot L^2 + 1 - \cosh(\lambda L) \\ \rightarrow C_3 \cdot \lambda \cdot L &= \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot L^2 \\ \rightarrow C_3 &= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot L\end{aligned}\quad (64)$$

3) Caso Particular 3

Para el Caso Particular 3, se determina que la viga continua a analizar se encuentra, en uno de sus extremos, empotrada y en el otro extremo libre como se muestra en la *Figura 10*.

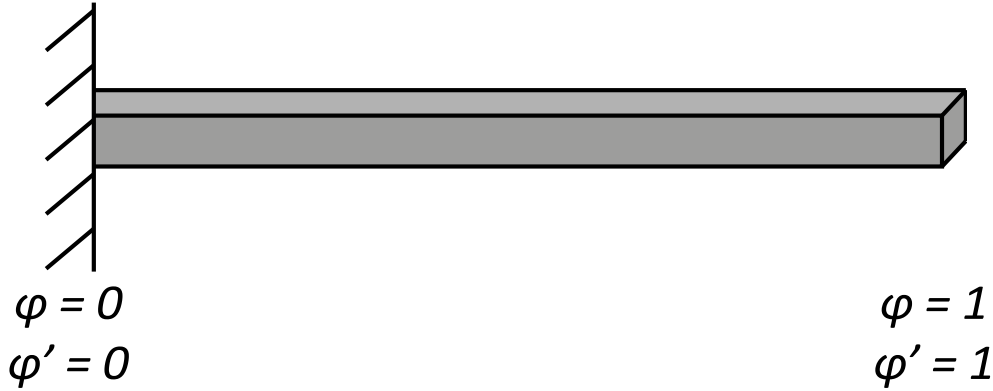


Figura 10: Representación del Caso Particular 3.

Por tanto, en el extremo empotrado el giro y el alabeo están restringidos:

$$\theta(0) = \theta'(0) = 0$$

Y en el extremo libre ni el alabeo ni el giro estarán restringidos, pero si el bimomento:

$$\theta''(L) = 0$$

También, se sabe que la Torsión en el extremo libre es nula, por tanto, con la suma de las *Ecuaciones 4 y 5*, se obtiene:

$$\begin{aligned} T(L) &= -E \cdot I_w \cdot \theta'''(L) + G \cdot I_T \cdot \theta'(L) = 0 \\ -E \cdot I_w \cdot \theta'''(L) + E \cdot I_w \cdot \lambda^2 \cdot \theta'(L) &= 0 \\ \theta'''(L) - \lambda^2 \cdot \theta'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Para este caso, las ecuaciones que se utilizarán son las siguientes:

$$\theta(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot \left[C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda \cdot x + C_4 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot x^2 \right] \quad (40)$$

$$\theta'(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot x] \quad (41)$$

$$\theta''(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda x) - \lambda^2] \quad (42)$$

$$\theta'''(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda x)] \quad (43)$$

Se sustituye el valor de x por 0 en las *Ecuaciones 40 y 41*:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_2 + C_4] = 0 \\ \rightarrow C_2 + C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

$$\theta'(0) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda + C_3 \cdot \lambda] = 0$$

$$\rightarrow C_1 + C_3 = 0 \quad (67)$$

Se sustituye en la Ecuación 42 el valor de x por L :

$$\theta''(L) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda L) - \lambda^2] = 0$$

$$\rightarrow C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) - 1 = 0 \quad (68)$$

Se sustituye en las Ecuaciones 43 y 41 el valor de x por L :

$$\theta'''(L) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda L)] \quad (69)$$

$$\theta'(L) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot L] \quad (70)$$

Y a continuación se sustituyen estas derivadas, las Ecuaciones 69 y 70, en la Ecuación 65:

$$\frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda L)] - \lambda^2 \cdot \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot L] = 0$$

$$[C_1 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \sinh(\lambda L)] - [C_1 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 - \lambda \cdot L] = 0$$

$$\rightarrow -C_3 + \lambda \cdot L = 0$$

$$\rightarrow C_3 = \lambda \cdot L \quad (71)$$

En la Ecuación 63 se sustituye el valor de C_3 , Ecuación 71:

$$C_1 + \lambda \cdot L = 0$$

$$\rightarrow C_1 = -\lambda \cdot L \quad (72)$$

En la Ecuación 68 se sustituye el valor de C_1 , Ecuación 72:

$$C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) - 1 = 0$$

$$\rightarrow -\lambda \cdot L \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) - 1 = 0$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{1 + \lambda \cdot L \cdot \sinh(\lambda L)}{\cosh(\lambda L)} \quad (73)$$

Se sustituye la Ecuación 73, correspondiente al valor de C_2 , en la Ecuación 66:

$$\frac{1 + \lambda \cdot L \cdot \sinh(\lambda L)}{\cosh(\lambda L)} + C_4 = 0$$

$$\rightarrow C_4 = -\frac{1 + \lambda \cdot L \cdot \sinh(\lambda L)}{\cosh(\lambda L)} \quad (74)$$

4) Caso Particular 4

Una viga continua en la cual un extremo está apoyado en una horquilla y el otro se encuentra libre, como se muestra en la *Figura 11*.

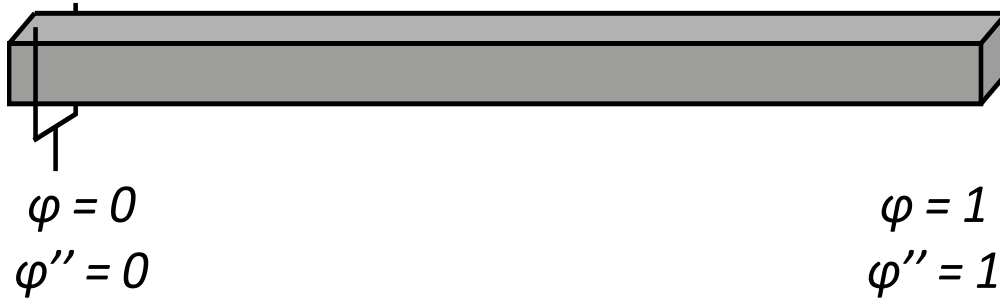


Figura 11: Representación del Caso Particular 4.

Por tanto, el extremo apoyado en horquilla el giro está restringido y el Bimomento también, pero sí se podría producir alabeo, por lo que este no será nulo, por lo que:

$$\theta(0) = \theta''(0) = 0$$

Y en el otro extremo ni el alabeo ni el giro estarán restringidos, pero si el bimomento, por lo que:

$$\theta''(L) = 0$$

También sabemos que, como la Torsión en el extremo libre es nula, se tiene que cumplir la siguiente ecuación:

$$\theta'''(L) - \lambda^2 \cdot \theta'(L) = 0 \quad (75)$$

Para este caso, las ecuaciones que se utilizarán serán las siguientes:

$$\theta(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot \left[C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda \cdot x + C_4 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot x^2 \right] \quad (40)$$

$$\theta'(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot x] \quad (41)$$

$$\theta''(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda x) - \lambda^2] \quad (42)$$

$$\theta'''(x) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda x)] \quad (43)$$

Se sustituye en la *Ecuación 40* el valor de x por 0:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_2 + C_4] = 0 \\ \rightarrow C_2 + C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

Se repite la operación en la *Ecuación 42*:

$$\begin{aligned} \theta''(0) &= \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_2 \cdot \lambda^2 - \lambda^2] = 0 \\ \rightarrow C_2 &= 1 \end{aligned} \quad (77)$$

Sustituimos la Ecuación 77, correspondiente al valor de C_2 , en la Ecuación 76, para obtener C_4 :

$$1 + C_4 = 0$$

$$\rightarrow C_4 = -1 \quad (78)$$

Se sustituye en la Ecuación 42 el valor de x por L :

$$\theta''(L) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^2 \cdot \cosh(\lambda L) - \lambda^2] = 0$$

$$\rightarrow C_1 \cdot \sinh(\lambda L) + C_2 \cdot \cosh(\lambda L) - 1 = 0$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)} \quad (79)$$

Se sustituye en las Ecuaciones 43 y 41 el valor de x por L :

$$\theta'''(L) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda L)] \quad (80)$$

$$\theta'(L) = \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot L] \quad (81)$$

Se sustituyen las Ecuaciones 80 y 81 en la Ecuación 75:

$$\frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda L)] - \lambda^2 \cdot \frac{m_T}{\lambda^2 \cdot G \cdot I_T} \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot L] = 0$$

$$[C_1 \cdot \lambda^3 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda L)] - \lambda^2 \cdot [C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 \cdot \lambda - \lambda^2 \cdot L] = 0$$

$$[C_1 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \sinh(\lambda L)] - [C_1 \cdot \cosh(\lambda L) + C_2 \cdot \sinh(\lambda L) + C_3 - \lambda \cdot L] = 0$$

$$\rightarrow -C_3 + \lambda \cdot L = 0$$

$$\rightarrow C_3 = \lambda \cdot L \quad (82)$$

6.1.2. Resumen de los resultados

1) Caso Particular 1

$$C_1 = -\frac{\lambda L}{2}$$

$$C_2 = \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2}$$

$$C_3 = \frac{\lambda L}{2}$$

$$C_4 = -\frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2}$$

2) Caso Particular 2

$$C_1 = \frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)}$$

$$C_2 = 1$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot L$$

$$C_4 = -1$$

3) Caso Particular 3

$$C_1 = -\lambda \cdot L$$

$$C_2 = \frac{1 + \lambda L \cdot \sinh(\lambda L)}{\cosh(\lambda L)}$$

$$C_3 = \lambda \cdot L$$

$$C_4 = -\frac{1 + \lambda L \cdot \sinh(\lambda L)}{\cosh(\lambda L)}$$

4) Caso Particular 4

$$C_1 = \frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)}$$

$$C_2 = 1$$

$$C_3 = \lambda \cdot L$$

$$C_4 = -1$$

6.1.3. Programación de los casos

Para conseguir los resultados de todos los casos particulares se programa una función, llamada "SOLUTIONS", que será la encargada de, usando los datos que se introduzcan en el software, mostrar los resultados para cada uno de los cuatro casos particulares.

Código de la función

Para que la función "SOLUTIONS", que se explicará seguidamente, se ejecute, se implementará en el software la siguiente línea de código, que, una vez obtenidos los resultados de los casos particulares, se eliminará de este:

```
Call SOLUTIONS(E, Ia, G, It, L)
```

Llama a la función que se explica a continuación.

A continuación, se explica qué se realizará al llamar la función "SOLUTIONS".

```
Private Function SOLUTIONS(E, Ia, G, It, L)
```

```
Dim mT As Double
```

```
mT = 1000#
```

Se utiliza un momento torsor constante en toda la viga de un valor de 1000 N/m.

```
Dim LAMBDA As Double, LambdaL As Double, CHL  
As Double, SHL As Double
```

```
LAMBDA = Sqr(G * It / E / Ia)
```

Se asigna a la variable "LAMBDA" el valor de λ , es decir:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_w}}$$

```
LambdaL = LAMBDA * L
```

Se asigna a la variable "LambdaL" el valor de la multiplicación de λ con L.

```
SHL = SH(LambdaL)
```

Se asigna a la variable "SHL" el valor del seno hiperbólico de λL .

```
CHL = CH(LambdaL)
```

Se asigna a la variable "CHL" el valor del coseno hiperbólico de λL .

```
Dim C1(4) As Double, C2(4) As Double, C3(4)  
As Double, C4(4) As Double
```

1) Caso Particular 1

$$C1(1) = -\text{Lambda}L / 2\#$$

$$C2(1) = \text{Lambda}L / 2\# * (\text{Lambda}L + \text{Lambda}L * \text{CHL} - 2\# * \text{SHL}) / (2\# - 2\# * \text{CHL} + \text{Lambda}L * \text{SHL})$$

$$C3(1) = -C1(1)$$

$$C4(1) = -C2(1)$$

Se asigna a las variables “C1”, “C2”, “C3” y “C4”, en la fila 1 de estas, su valor para el caso particular 1, es decir:

$$C_1 = -\frac{\lambda L}{2}$$

$$C_2 = \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2}$$

$$C_3 = \frac{\lambda L}{2}$$

$$C_4 = -\frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{[2 \cdot \sinh(\lambda L) - \lambda L - \lambda L \cdot \cosh(\lambda L)]}{-\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) + 2 \cdot \cosh(\lambda L) - 2}$$

2) Caso Particular 2

$$C1(2) = (1\# - \text{CHL}) / \text{SHL}$$

$$C2(2) = 1\#$$

$$C3(2) = \text{Lambda}L / 2\#$$

$$C4(2) = -1\#$$

Se asigna a las variables “C1”, “C2”, “C3” y “C4”, en la fila 2 de estas, su valor para el caso particular 2, es decir:

$$C_1 = \frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)}$$

$$C_2 = 1$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot L$$

$$C_4 = -1$$

3) Caso Particular 3

$$C1(3) = -\text{Lambda}L$$

$$C2(3) = (1\# + \text{Lambda}L * \text{SHL}) / \text{CHL}$$

$$C3(3) = -C1(3)$$

$$C4(3) = -C2(3)$$

Se asigna a las variables “C1”, “C2”, “C3” y “C4”, en la fila 3 de estas, su valor para el caso particular 3, es decir:

$$C_1 = -\lambda \cdot L$$

$$C_2 = \frac{1 + \lambda L \cdot \sinh(\lambda L)}{\cosh(\lambda L)}$$

$$C_3 = \lambda \cdot L$$

$$C_4 = -\frac{1 + \lambda L \cdot \sinh(\lambda L)}{\cosh(\lambda L)}$$

4) Caso Particular 4

$$C1(4) = (1\# - \text{CHL}) / \text{SHL}$$

$$C2(4) = 1\#$$

$$C3(4) = \text{Lambda}L$$

$$C4(4) = -1\#$$

Se asigna a las variables “C1”, “C2”, “C3” y “C4”, en la fila 3 de estas, su valor para el caso particular 3, es decir:

$$C_1 = \frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)}$$

$$C_2 = 1$$

$$C_3 = \lambda \cdot L$$

$$C_4 = -1$$

Dim X As Double, T As Double, TSV As Double,
TW As Double, BM As Double, I As Integer,
CASO As Integer

```
For I = 0 To 10
```

```
    X = Cdbl(I) * L / 10#
```

```
    Hoja4.Cells(3 + I, 1) = X
```

```
For CASO = 1 To 4
```

```
    T = mT / LAMBDA * (C3(CASO) - LAMBDA * X)
```

```
    TW = -mT / LAMBDA * (C2(CASO) * SH(LAMBDA * X) + C1(CASO) * CH(LAMBDA * X))
```

```
    TSV = mT / LAMBDA * (C3(CASO) + C2(CASO) * SH(LAMBDA * X) + C1(CASO) * CH(LAMBDA * X) - LAMBDA * X)
```

```
    BM = -mT / LAMBDA / LAMBDA * (C2(CASO) * CH(LAMBDA * X) + C1(CASO) * SH(LAMBDA * X) - 1#)
```

```
    Hoja4.Cells(3 + I, 1 + 4 * CASO - 3) = TSV
```

```
    Hoja4.Cells(3 + I, 1 + 4 * CASO - 2) = TW
```

```
    Hoja4.Cells(3 + I, 1 + 4 * CASO - 1) = T
```

```
    Hoja4.Cells(3 + I, 1 + 4 * CASO - 0) = BM
```

```
Next CASO
```

```
Next I
```

```
End Function
```

Se utilizarán 10 nodos para cada caso, por tanto, se calcula a partir de la longitud de la viga las coordenadas de cada nodo.

Para cada caso, se calcula la torsión, la torsión de alabeo, la torsión de Saint-Venant y el bimomento, que corresponden a las siguientes ecuaciones:

$$T = \frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_3 - \lambda \cdot x]$$

$$T_w = -\frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x)]$$

$$T_{SV} = \frac{m_T}{\lambda} \cdot [C_1 \cdot \cosh(\lambda x) + C_2 \cdot \sinh(\lambda x) + C_3 - \lambda \cdot x]$$

$$B = -\frac{m_T}{\lambda^2} \cdot [C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) - 1]$$

Se muestran en la hoja "Solutions" los valores de la torsión, la torsión de alabeo, la torsión de Saint-Venant y el bimomento de cada caso particular.

6.1.4. Obtención de los resultados

Una vez implementado en el software una función que calcula, para los valores introducidos en el Excel, los resultados para cada uno de los cuatro casos particulares se utilizarán estos resultados para compararlos con los resultados que proporciona el software para cada caso particular.

Para cada caso particular se introducirán los mismos parámetros, que serán los correspondientes a los valores de la *Tabla 2*.

G	80000	N/mm^2
E	200000	N/mm^2
I_T	9300,0000	mm^4
I_W	87500000,000	mm^6
L	5000,0000	mm

Tabla 2: Datos comunes para todos los casos particulares.

El momento torsor que se utilizará para todos los casos será un momento torsor constante en toda la viga de valor 1000 kN/m .

Lo que variará en los extremos serán los giros y la derivada de estos, es decir, el alabeo, dependiendo de las condiciones de contorno de cada caso particular.

En cada caso utilizaremos dos valores de elementos diferentes: 10, 50 y 500 elementos, para comprobar como varían los resultados dependiendo del número de elementos.

1) Caso Particular 1

El Caso Particular 1 corresponde al caso de una viga continua en la cual los dos extremos están empotrados. Por tanto, en los extremos el giro y el alabeo están restringidos.

Una vez introducidos todos los parámetros, obtendremos dos conjuntos de resultados: uno proporcionado por el software y otro que será resultado de las fórmulas que hemos obtenido de los cálculos del Caso Particular 1.

A continuación, los resultados del Caso Particular 1 a partir de la solución analítica o exacta obtenida de los cálculos del Caso Particular 1:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	2500,00	2500,00	-359,90
500	1904,04	95,96	2000,00	8,80
1000	1496,32	3,68	1500,00	22,96
1500	999,86	0,14	1000,00	23,50
2000	499,99	0,01	500,00	23,52
2500	0,00	0,00	0,00	23,52
3000	-499,99	-0,01	-500,00	23,52
3500	-999,86	-0,14	-1000,00	23,50
4000	-1496,30	-3,70	-1500,00	22,95
4500	-1903,57	-96,43	-2000,00	8,73
5000	12,40	-2512,40	-2500,00	-361,80

Tabla 3: Resultados exactos del Caso Particular 1.

Dado que este es el primer ejemplo, se explicará con detalle su cálculo mediante el software desarrollado. Para una explicación más completa de la utilización del software se puede recurrir al **Manual de Usuario**.

Primero, introduciremos los parámetros generales, como se muestra en la *Figura 12*. Para mostrar la diferencia de precisión dependiendo del número elementos utilizaremos un número de 10 elementos inicialmente y, a continuación, un número de 50 y 500 elementos.



THIN-WALLED ELEMENT	
[Continuous Beams]	
Nº of nodes	11
Nº of elements	10
G	N/mm ² 80000
E	N/mm ² 200000
I _t	mm ⁴ 1969,0000
I _w	mm ⁶ 87500000,000
λ	0,0030002
L	mm 2000,0000
λL	6,000

Figura 12: Parámetros generales del Caso Particular 1, con 10 elementos.

Seguidamente, introducimos las características de cada nodo, como se muestra en la *Figura 13*. Introducimos las coordenadas de cada nodo, sus cargas nodales, en este caso, nulas, y sus condiciones de contorno, en este caso, como los extremos de la viga están empotrados, el giro y el alabeo están restringidos, por tanto, introduciremos el valor 1 en ambos extremos, tanto en el giro como en el alabeo.

Node	Coordinate	Nodal actions		Contour	
	x (mm)	T (kNm)	B (kNm ²)	θ	θ'
1	0			1	1
2	500				
3	1000				
4	1500				
5	2000				
6	2500				
7	3000				
8	3500				
9	4000				
10	4500				
11	5000			1	1

Figura 13: Características nodales del Caso Particular 1, con 10 elementos.

A continuación, introducimos el torsor uniforme de cada elemento, en este caso, un momento torsor uniforme a lo largo de toda la viga de un valor de 1000 kNm/m, como se muestra en la *Figura 14*.

Element	Node 1	Node 2	m (kNm/m)
1	1	2	1000
2	2	3	1000
3	3	4	1000
4	4	5	1000
5	5	6	1000
6	6	7	1000
7	7	8	1000
8	8	9	1000
9	9	10	1000
10	10	11	1000

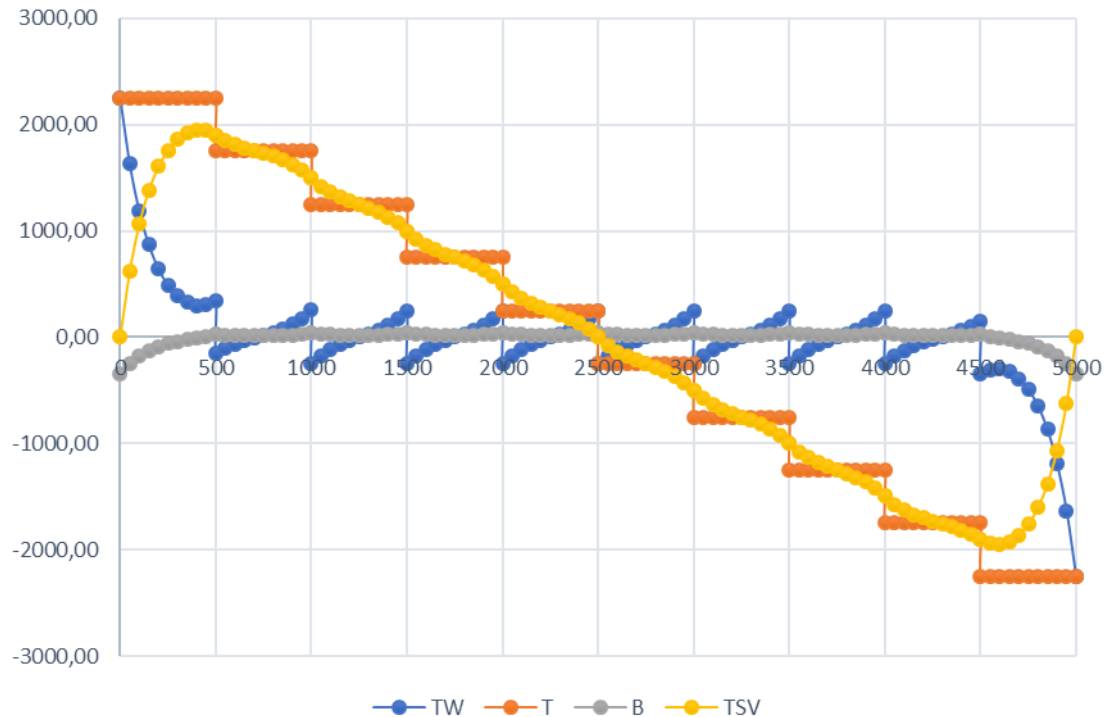
Figura 14: Conectividad y momento torsor uniforme del Caso Particular 1, con 10 elementos.

Por último, apretamos el botón "Calculate" para proceder a la obtención de los resultados.

Nodo	Giro	Alabeo	T (kNm)	B (kNm ²)
1	0,0000	0,0000	-2500,0000	-324,1343
2	1016,5303	2559,1980	0,0000	0,0000
3	2173,5844	2011,1787	0,0000	0,0000
4	3012,9081	1343,8960	0,0000	0,0000
5	3516,9123	672,0357	0,0000	0,0000
6	3684,9220	0,0000	0,0000	0,0000
7	3516,9123	-672,0357	0,0000	0,0000
8	3012,9081	-1343,8960	0,0000	0,0000
9	2173,5844	-2011,1787	0,0000	0,0000
10	1016,5303	-2559,1980	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	-2500,0000	324,1343

Figura 15: Resultados de los nodos del Caso Particular 1, con 10 elementos.

En la solución analítica, el momento torsor total es lineal: de 2500 a -2500 kNm . Al discretizar en 10 elementos con torsor uniforme, nuestra solución aproxima a “trozos” la distribución lineal exacta. Ello es debido a que nuestro elemento está basado en la ecuación homogénea y, por tanto, en cada elemento no hay cargas interiores, estando éstas en los nodos a través de la superposición con las reacciones de empotramiento perfecto.



Gráfica 1: Representación gráfica del Caso Particular 1, con 10 elementos.

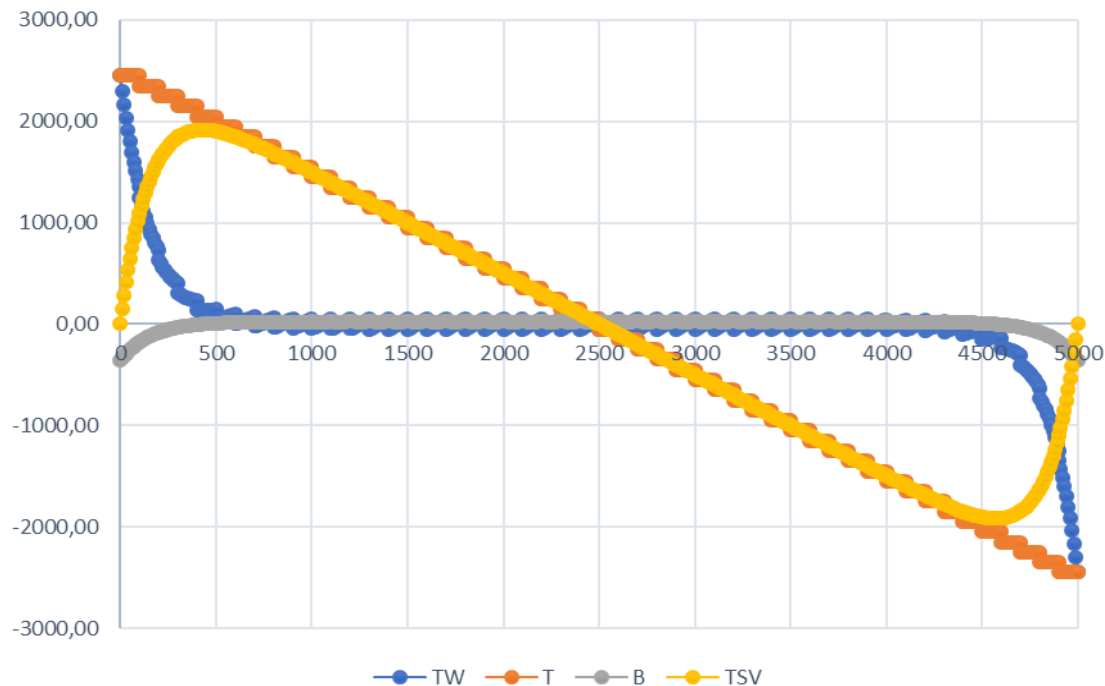
En la Gráfica 1 se puede observar claramente la aproximación obtenida. El programa da los valores del torsor uniforme, de alabeo, total y bimomento para cada elemento en 9 puntos interiores y en sus extremos, por ejemplo, el primer elemento de la viga, como se muestra en la Figura 16. En las coordenadas de los nodos que están compartidos por dos elementos, se obtienen dos resultados, uno por cada elemento, como se puede observar en la Figura 16, en la coordenada 500 mm hay dos resultados uno para el primer elemento de la viga y otro para el segundo elemento de esta.

x (mm)	$T_{sv} \text{ (kNm)}$	$T_w \text{ (kNm)}$	$T \text{ (kNm)}$	$B \text{ (kNm}^2\text{)}$
0	0,000	2250,000	2250,000	-342,015
50	619,340	1630,660	2250,000	-245,849
100	1063,824	1186,176	2250,000	-176,045
150	1381,114	868,886	2250,000	-125,119
200	1605,233	644,767	2250,000	-87,610
250	1760,213	489,787	2250,000	-59,494
300	1862,672	387,328	2250,000	-37,759
350	1923,599	326,401	2250,000	-20,072
400	1949,525	300,475	2250,000	-4,537
450	1943,232	306,768	2250,000	10,511
500	1904,043	345,957	2250,000	26,686
500	1904,043	-154,043	1750,000	26,686

Figura 16: Resultados del primer elemento del Caso Particular 1.

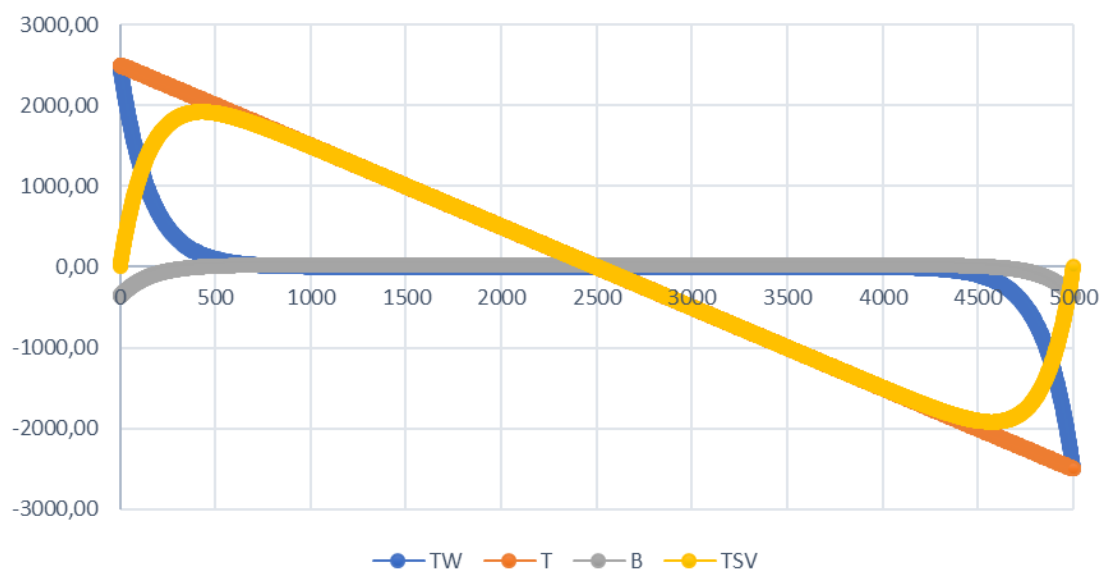
Por tanto, como se observa en la *Figura 16*, obtenemos para el primer elemento un torsor de 2250 kNm que es la aproximación constante a los torsores reales de 2500 y 2000 kNm para el primer elemento de la viga.

Como se puede observar en la *Gráfica 2*, con 50 elementos la solución aproximada por elementos finitos va convergiendo a la exacta.



Gráfica 2: Representación gráfica del Caso Particular 1, con 50 elementos.

En la *Gráfica 3* se observan las torsiones y bimomentos a lo largo de la viga del Caso Particular 1 para 500 elementos, en este caso la solución aproximada es muy próxima a la exacta. Se puede observar como en los extremos la torsión que predomina es la torsión de alabeo, por el contrario, a medida que se aleja de los extremos va disminuyendo, al contrario que la torsión de Saint-Venant que va aumentando hasta ser prácticamente la causa de toda la torsión.



Gráfica 3: Representación gráfica del Caso Particular 1, con 500 elementos.

Y seguidamente, los resultados del software para 10, 50 y 500 elementos.

Numero de elementos = 10

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_w (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	2250,00	2250,00	-342,02
500	1904,04	345,96	2250,00	26,69
500	1904,04	-154,04	1750,00	26,69
1000	1496,32	253,68	1750,00	40,84
1000	1496,32	-246,32	1250,00	40,84
1500	999,86	250,14	1250,00	41,38
1500	999,86	-249,86	750,00	41,38
2000	499,99	250,01	750,00	41,40
2000	499,99	-249,99	250,00	41,40
2500	0,00	250,00	250,00	41,40
2500	0,00	-250,00	-250,00	41,40
3000	-499,99	249,99	-250,00	41,40
3000	-499,99	-250,01	-750,00	41,40
3500	-999,86	249,86	-750,00	41,38
3500	-999,86	-250,14	-1250,00	41,38
4000	-1496,32	246,32	-1250,00	40,84
4000	-1496,32	-253,68	-1750,00	40,84
4500	-1904,04	154,04	-1750,00	26,69
4500	-1904,04	-345,96	-2250,00	26,69
5000	0,00	-2250,00	-2250,00	-342,02

Tabla 4: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 10 elementos.

Como con el software nos da dos valores en los nodos compartidos por dos elementos, uno por cada elemento, calculamos la media en cada nodo, obteniendo la siguiente tabla:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_w (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	2250,00	2250,00	-342,02
500	1904,04	95,96	2000,00	26,69
1000	1496,32	3,68	1500,00	40,84
1500	999,86	0,14	1000,00	41,38
2000	499,99	0,01	500,00	41,40
2500	0,00	0,00	0,00	41,40
3000	-499,99	-0,01	-500,00	41,40
3500	-999,86	-0,14	-1000,00	41,38
4000	-1496,32	-3,68	-1500,00	40,84
4500	-1904,04	-95,96	-2000,00	26,69
5000	0,00	-2250,00	-2250,00	-342,02

Tabla 5: Resultados del software para el Caso Particular 1 para cada nodo, con 10 elementos.

En los próximos casos, se mostrará directamente la media obtenida a partir de los resultados del software. Los resultados originales se mostrarán en el Anexo ^[A6].

Numero de elementos = 50

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_w (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	2450,00	2450,00	-359,07
500	1904,04	95,96	2000,00	9,63
1000	1496,32	3,68	1500,00	23,78
1500	999,86	0,14	1000,00	24,33
2000	499,99	0,01	500,00	24,35
2500	0,00	0,00	0,00	24,35
3000	-499,99	-0,01	-500,00	24,35
3500	-999,86	-0,14	-1000,00	24,33
4000	-1496,32	-3,68	-1500,00	23,78
4500	-1904,04	-95,96	-2000,00	9,63
5000	0,00	-2450,00	-2450,00	-359,07

Tabla 6: Resultados del software para el Caso Particular 1 para cada nodo, con 50 elementos.

Numero de elementos = 500

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_w (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	2495,00	2495,00	-359,89
500	1904,04	95,96	2000,00	8,81
1000	1496,32	3,68	1500,00	22,96
1500	999,86	0,14	1000,00	23,51
2000	499,99	0,01	500,00	23,53
2500	0,00	0,00	0,00	23,53
3000	-499,99	-0,01	-500,00	23,53
3500	-999,86	-0,14	-1000,00	23,51
4000	-1496,32	-3,68	-1500,00	22,96
4500	-1904,04	-95,96	-2000,00	8,81
5000	0,00	-2495,00	-2495,00	-359,89

Tabla 7: Resultados del software para el Caso Particular 1 para cada nodo, con 500 elementos.

2) Caso Particular 2

El Caso Particular 2 corresponde al caso de una viga continua en la cual los dos extremos están apoyados en una horquilla. Por tanto, en los extremos el giro está restringido y el bimomento también será nulo, pero sí se podrá producir alabeo.

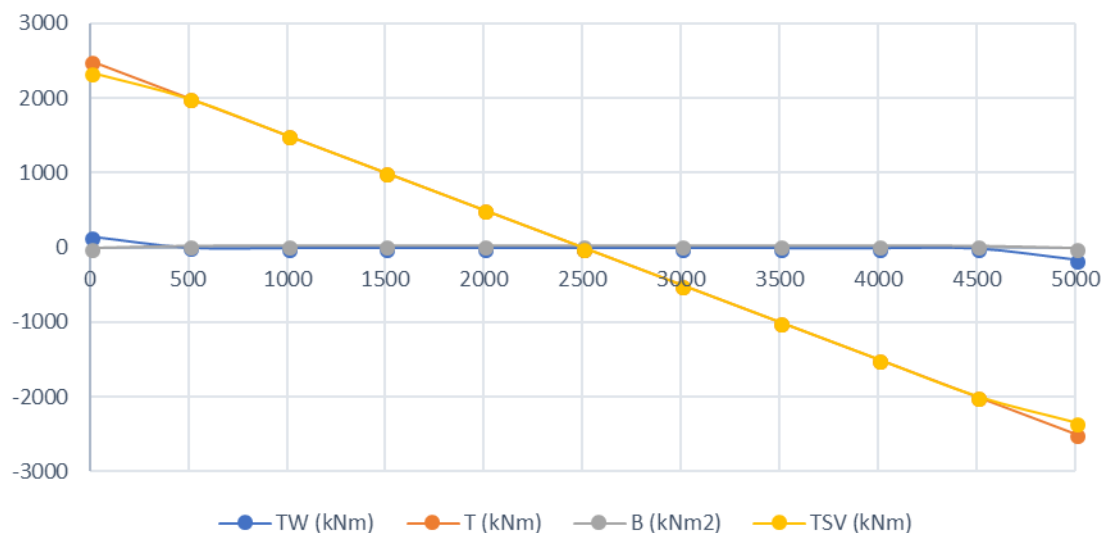
Sabiendo esto, introduciremos en el software que el giro, tanto en el extremo inicial como en el final de la viga, está restringido, pero, en cambio, que el alabeo no está restringido en ninguno de los extremos de la viga.

A continuación, los resultados del Caso Particular 2 a partir de la solución analítica o exacta obtenida de los cálculos del Caso Particular 2:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_w (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	2346,63	153,37	2500,00	0,00
500	1994,11	5,89	2000,00	22,62
1000	1499,77	0,23	1500,00	23,49
1500	999,99	0,01	1000,00	23,52
2000	500,00	0,00	500,00	23,52
2500	0,00	0,00	0,00	23,52
3000	-500,00	0,00	-500,00	23,52
3500	-999,99	-0,01	-1000,00	23,52
4000	-1499,77	-0,23	-1500,00	23,49
4500	-1994,11	-5,89	-2000,00	22,62
5000	-2346,66	-153,34	-2500,00	0,00

Tabla 8: Resultados exactos del Caso Particular 2.

En la *Gráfica 4* se observan las torsiones y bimomentos a lo largo de la viga del Caso Particular 2, a partir de la solución analítica. Se puede observar como el bimomento está restringido en los extremos de la viga y como la torsión viene condicionada principalmente por la torsión de Saint-Venant, es decir, que el alabeo no condiciona prácticamente la torsión.



Gráfica 4: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 2.

Y seguidamente, los resultados del software para 10 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	2113,45	136,55	2250,00	-17,88
500	1985,16	14,84	2000,00	39,13
1000	1499,43	0,57	1500,00	41,32
1500	999,98	0,02	1000,00	41,40
2000	500,00	0,00	500,00	41,40
2500	0,00	0,00	0,00	41,40
3000	-500,00	0,00	-500,00	41,40
3500	-999,98	-0,02	-1000,00	41,40
4000	-1499,43	-0,57	-1500,00	41,32
4500	-1985,16	-14,84	-2000,00	39,13
5000	-2113,45	-136,55	-2250,00	-17,88

Tabla 9: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 10 elementos.

Para 50 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	2335,84	114,16	2450,00	-0,83
500	1993,70	6,30	2000,00	23,38
1000	1499,76	0,24	1500,00	24,31
1500	999,99	0,01	1000,00	24,35
2000	500,00	0,00	500,00	24,35
2500	0,00	0,00	0,00	24,35
3000	-500,00	0,00	-500,00	24,35
3500	-999,99	-0,01	-1000,00	24,35
4000	-1499,76	-0,24	-1500,00	24,31
4500	-1993,70	-6,30	-2000,00	23,38
5000	-2335,84	-114,16	-2450,00	-0,83

Tabla 10: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 50 elementos.

Para 500 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	2346,52	148,48	2495,00	-0,01
500	1994,11	5,89	2000,00	22,63
1000	1499,77	0,23	1500,00	23,50
1500	999,99	0,01	1000,00	23,53
2000	500,00	0,00	500,00	23,53
2500	0,00	0,00	0,00	23,53
3000	-500,00	0,00	-500,00	23,53
3500	-999,99	-0,01	-1000,00	23,53
4000	-1499,77	-0,23	-1500,00	23,50
4500	-1994,11	-5,89	-2000,00	22,63
5000	-2346,52	-148,48	-2495,00	-0,01

Tabla 11: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.

3) Caso Particular 3

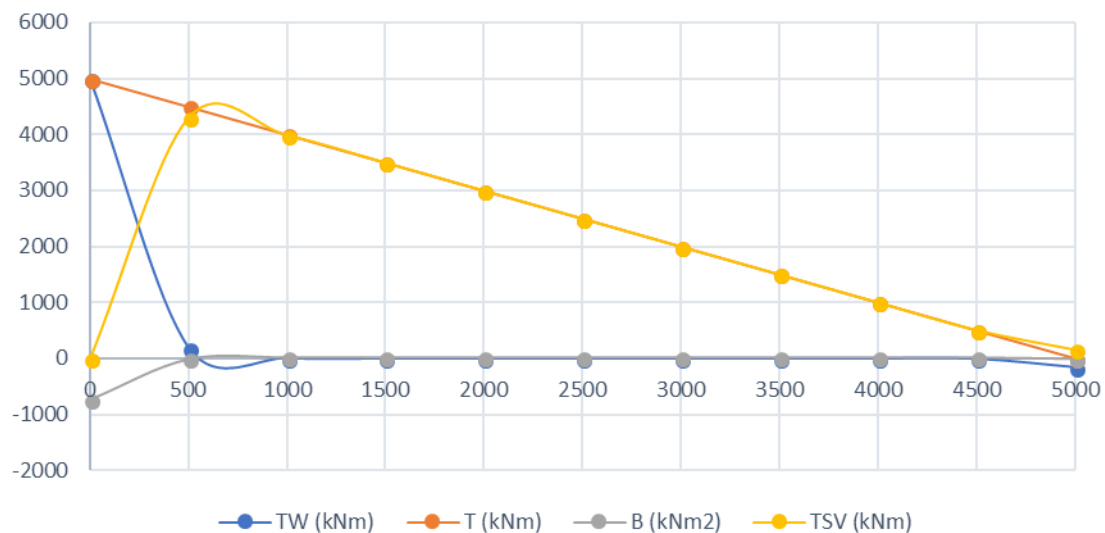
El Caso Particular 3 corresponde al caso de una viga continua en la cual un extremo está empotrado y el otro extremo se encuentra libre. Por tanto, en el extremo empotrado el giro y el alabeo están restringidos y en el extremo libre ni el alabeo ni el giro están restringidos, pero si el bimomento. Dadas estas características, los datos a introducir en el software serán que en el extremo inicial el giro y el alabeo están restringidos y, por el contrario, que en el extremo final ni el giro ni el alabeo estarán restringidos.

A continuación, los resultados obtenidos a partir de la solución analítica:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_w (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	5000,00	5000,00	-743,31
500	4308,09	191,91	4500,00	-5,91
1000	3992,63	7,37	4000,00	22,39
1500	3499,72	0,28	3500,00	23,48
2000	2999,99	0,01	3000,00	23,52
2500	2500,00	0,00	2500,00	23,52
3000	2000,00	0,00	2000,00	23,52
3500	1500,01	-0,01	1500,00	23,52
4000	1000,23	-0,23	1000,00	23,49
4500	506,03	-6,03	500,00	22,60
5000	157,05	-157,04	0,00	-0,56

Tabla 12: Resultados exactos del Caso Particular 3.

En la Gráfica 5 se observan las torsiones y bimomentos a lo largo de la viga del Caso 3, resultado analítico. Como se puede observar en el extremo que se encuentra empotrado la torsión que se encuentra presente viene dada exclusivamente por el alabeo que se produce en este extremo y que a medida que nos alejamos del extremo empotrado aparece la torsión de Saint-Venant a medida que va desapareciendo la torsión de alabeo, pasando a ser la torsión de Saint-Venant la fuente principal de la torsión. En cambio, en el extremo final que se encuentra libre, la torsión se anula a causa de los valores iguales, pero de signo contrario, de las diferentes torsiones.



Gráfica 5: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 3.

Y seguidamente, los resultados del software para 10 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	4750,00	4750,00	-725,43
500	4308,09	191,91	4500,00	11,97
1000	3992,63	7,37	4000,00	40,27
1500	3499,72	0,28	3500,00	41,36
2000	2999,99	0,01	3000,00	41,40
2500	2500,00	0,00	2500,00	41,40
3000	2000,00	0,00	2000,00	41,40
3500	1500,02	-0,02	1500,00	41,40
4000	1000,57	-0,57	1000,00	41,32
4500	514,84	-14,84	500,00	39,13
5000	386,55	-136,55	250,00	-17,88

Tabla 13: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 10 elementos.

Para 50 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	4950,00	4950,00	-742,49
500	4308,09	191,91	4500,00	-5,08
1000	3992,63	7,37	4000,00	23,22
1500	3499,72	0,28	3500,00	24,31
2000	2999,99	0,01	3000,00	24,35
2500	2500,00	0,00	2500,00	24,35
3000	2000,00	0,00	2000,00	24,35
3500	1500,01	-0,01	1500,00	24,35
4000	1000,24	-0,24	1000,00	24,31
4500	506,30	-6,30	500,00	23,38
5000	164,16	-114,16	50,00	-0,83

Tabla 14: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 50 elementos.

Para 500 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	0,00	4995,00	4995,00	-743,31
500	4308,09	191,91	4500,00	-5,90
1000	3992,63	7,37	4000,00	22,40
1500	3499,72	0,28	3500,00	23,49
2000	2999,99	0,01	3000,00	23,53
2500	2500,00	0,00	2500,00	23,53
3000	2000,00	0,00	2000,00	23,53
3500	1500,01	-0,01	1500,00	23,53
4000	1000,23	-0,23	1000,00	23,50
4500	505,89	-5,89	500,00	22,63
5000	153,48	-148,48	5,00	-0,01

Tabla 15: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos.

4) Caso Particular 4

El Caso Particular 4 corresponde al caso de una viga continua en la cual un extremo está apoyado en una horquilla y el otro se encuentra libre. Por tanto, en el extremo apoyado en horquilla el giro está restringido y el Bimomento también, pero sí se podría producir alabeo, por lo que este no será nulo. Y en el otro extremo, ni el alabeo ni el giro están restringidos, pero si el Bimomento.

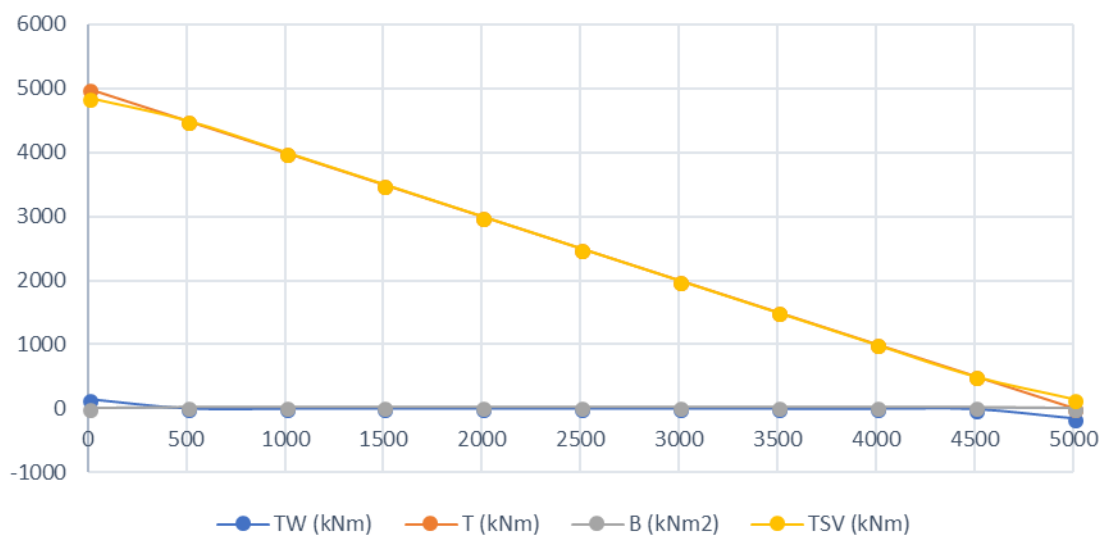
Los datos que se introducirán en el software serán que en el extremo inicial el giro está restringido pero el alabeo no, y, en el extremo final, ni el giro ni el alabeo están restringidos.

A continuación, los resultados exactos para el Caso Particular 4:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	4846,63	153,37	5000,00	0,00
500	4494,11	5,89	4500,00	22,62
1000	3999,77	0,23	4000,00	23,49
1500	3499,99	0,01	3500,00	23,52
2000	3000,00	0,00	3000,00	23,52
2500	2500,00	0,00	2500,00	23,52
3000	2000,00	0,00	2000,00	23,52
3500	1500,01	-0,01	1500,00	23,52
4000	1000,23	-0,23	1000,00	23,49
4500	505,89	-5,89	500,00	22,62
5000	153,34	-153,34	0,00	0,00

Tabla 16: Resultados exactos del Caso Particular 4.

En la Gráfica 6, se observan las torsiones y los bimomentos a lo largo de la viga del Caso Particular 4, a partir de la solución analítica. Como se había establecido en las condiciones de este caso, se observa que el bimomento está restringido tanto al inicio como al final de la viga y que la fuente principal de torsión en el extremo apoyado en una horquilla viene dada por la torsión de Saint-Venant.



Gráfica 6: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 4.

Y seguidamente, los resultados del software para 10 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	4613,45	136,55	4750,00	-17,88
500	4485,16	14,84	4500,00	39,13
1000	3999,43	0,57	4000,00	41,32
1500	3499,98	0,02	3500,00	41,40
2000	3000,00	0,00	3000,00	41,40
2500	2500,00	0,00	2500,00	41,40
3000	2000,00	0,00	2000,00	41,40
3500	1500,02	-0,02	1500,00	41,40
4000	1000,57	-0,57	1000,00	41,32
4500	514,84	-14,84	500,00	39,13
5000	386,55	-136,55	250,00	-17,88

Tabla 17: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 10 elementos.

Para 50 elementos:

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	4835,84	114,16	4950,00	-0,83
500	4493,70	6,30	4500,00	23,38
1000	3999,76	0,24	4000,00	24,31
1500	3499,99	0,01	3500,00	24,35
2000	3000,00	0,00	3000,00	24,35
2500	2500,00	0,00	2500,00	24,35
3000	2000,00	0,00	2000,00	24,35
3500	1500,01	-0,01	1500,00	24,35
4000	1000,24	-0,24	1000,00	24,31
4500	506,30	-6,30	500,00	23,38
5000	164,16	-114,16	50,00	-0,83

Tabla 18: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 50 elementos.

Para 500 elementos:

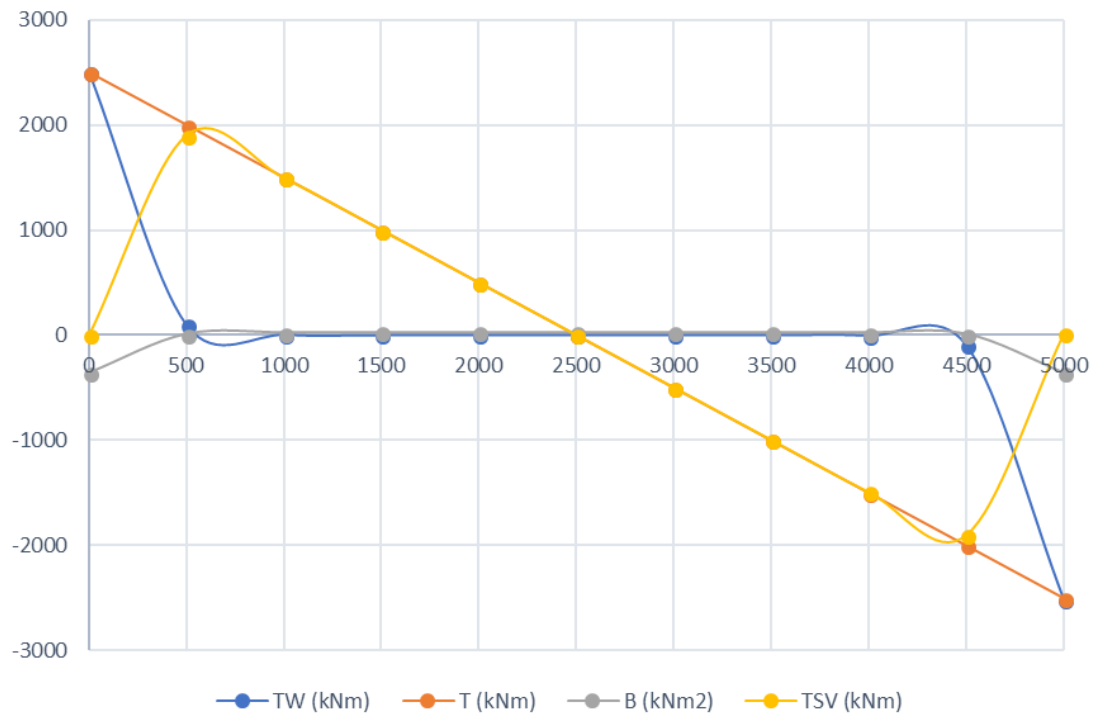
x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_W (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
0	4846,52	148,48	4995,00	-0,01
500	4494,11	5,89	4500,00	22,63
1000	3999,77	0,23	4000,00	23,50
1500	3499,99	0,01	3500,00	23,53
2000	3000,00	0,00	3000,00	23,53
2500	2500,00	0,00	2500,00	23,53
3000	2000,00	0,00	2000,00	23,53
3500	1500,01	-0,01	1500,00	23,53
4000	1000,23	-0,23	1000,00	23,50
4500	505,89	-5,89	500,00	22,63
5000	153,48	-148,48	5,00	-0,01

Tabla 19: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos.

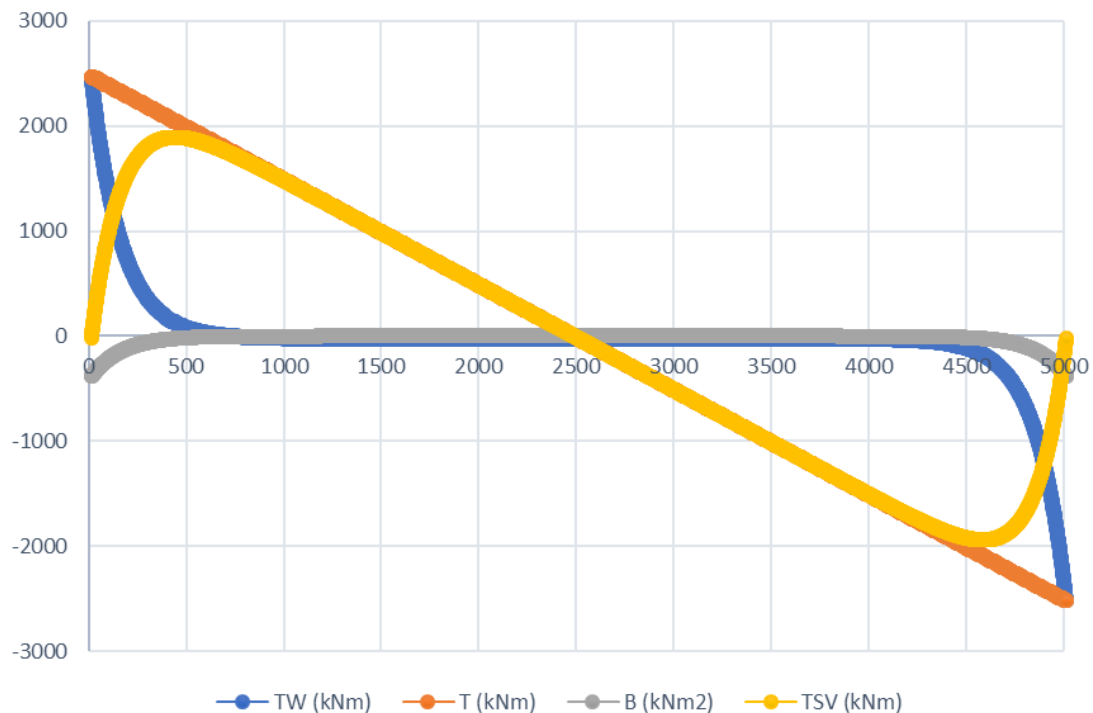
6.1.1. Comparación de gráficas

A continuación, se muestran, para cada caso particular, las gráficas de los resultados obtenidos a partir de la solución analítica y las gráficas de los resultados del software, con 500 elementos.

1) Caso Particular 1

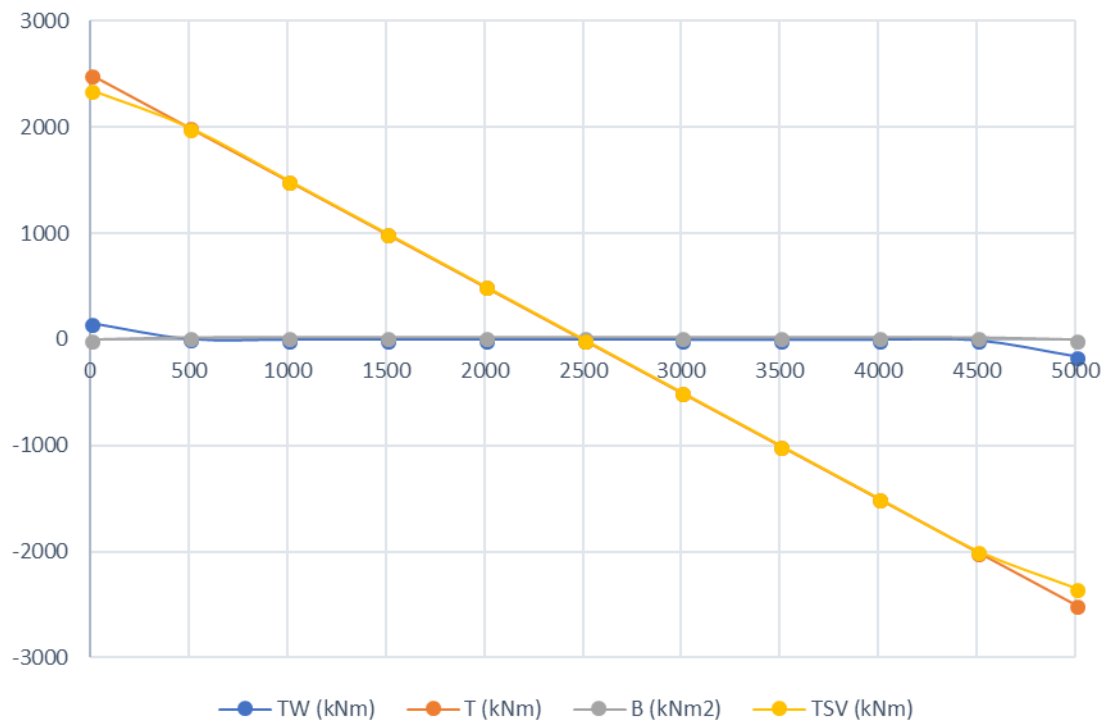


Gráfica 7: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 1.

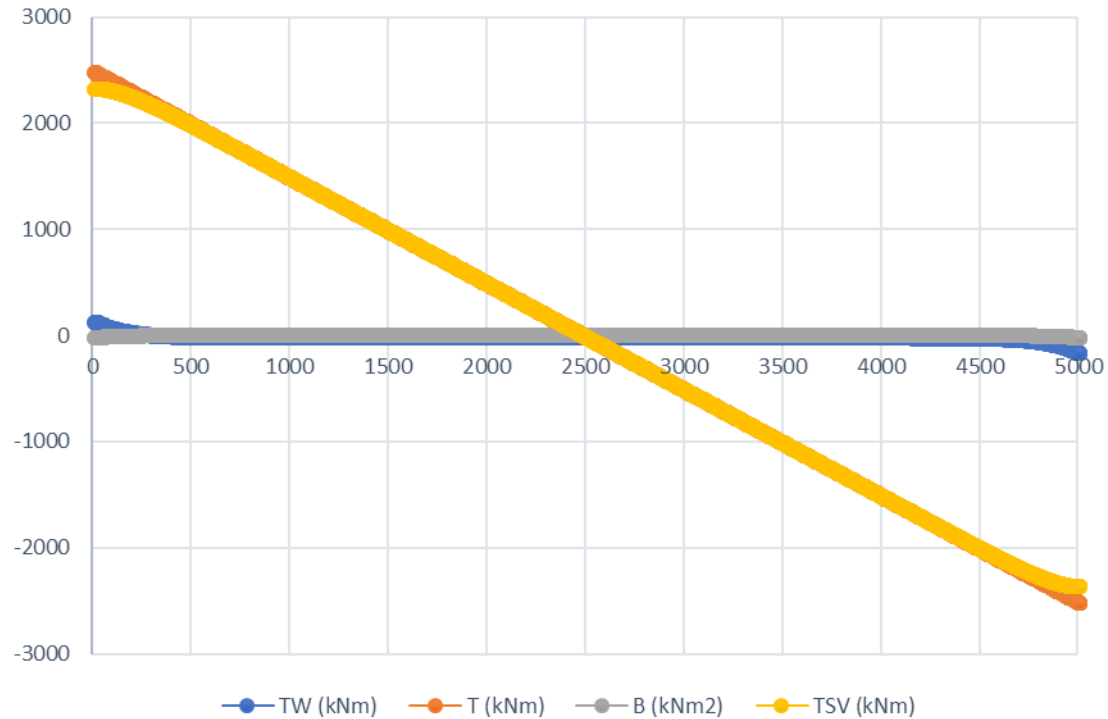


Gráfica 8: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 500 elementos.

2) Caso Particular 2

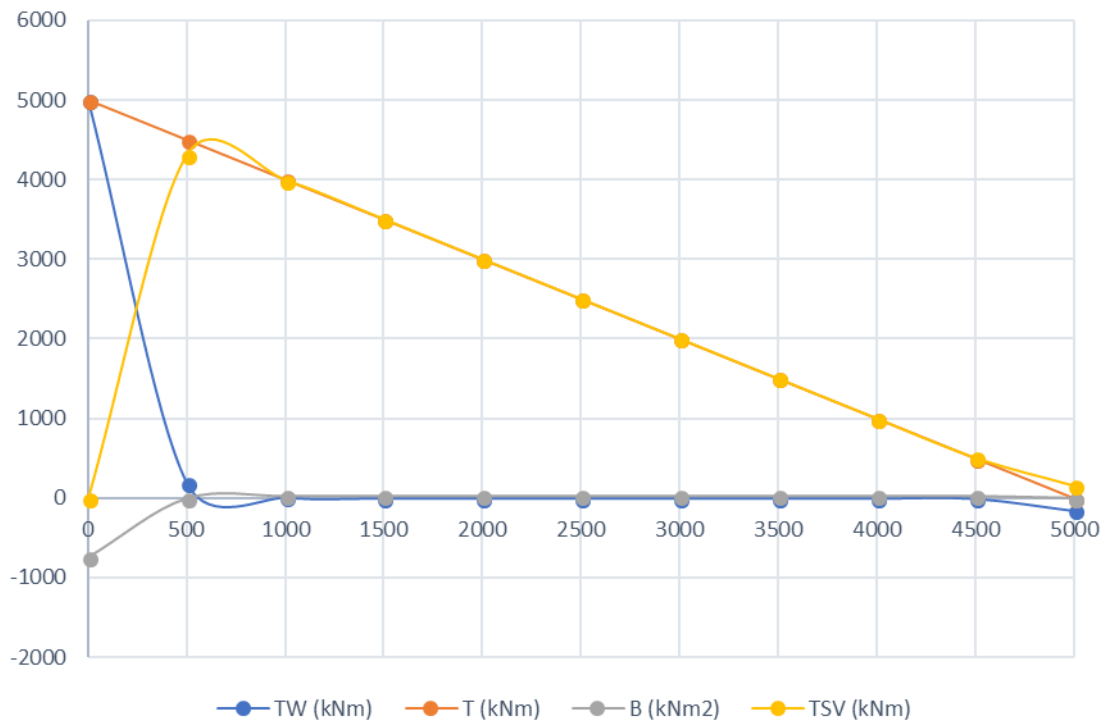


Gráfica 9: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 2.

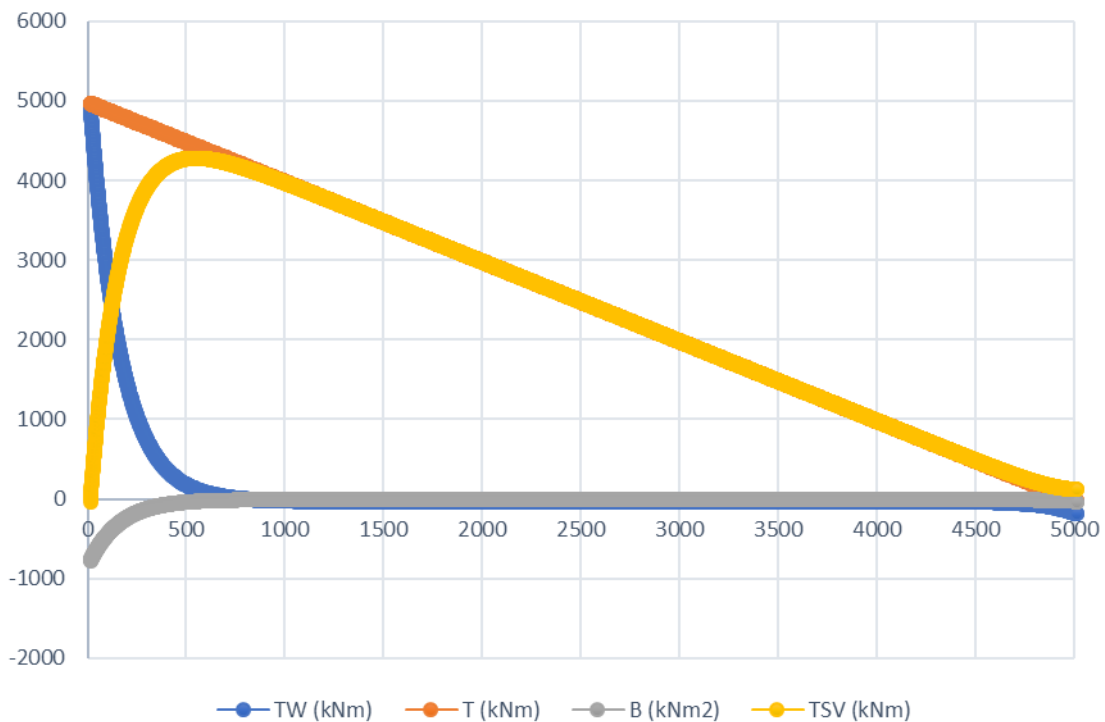


Gráfica 10: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.

3) Caso Particular 3

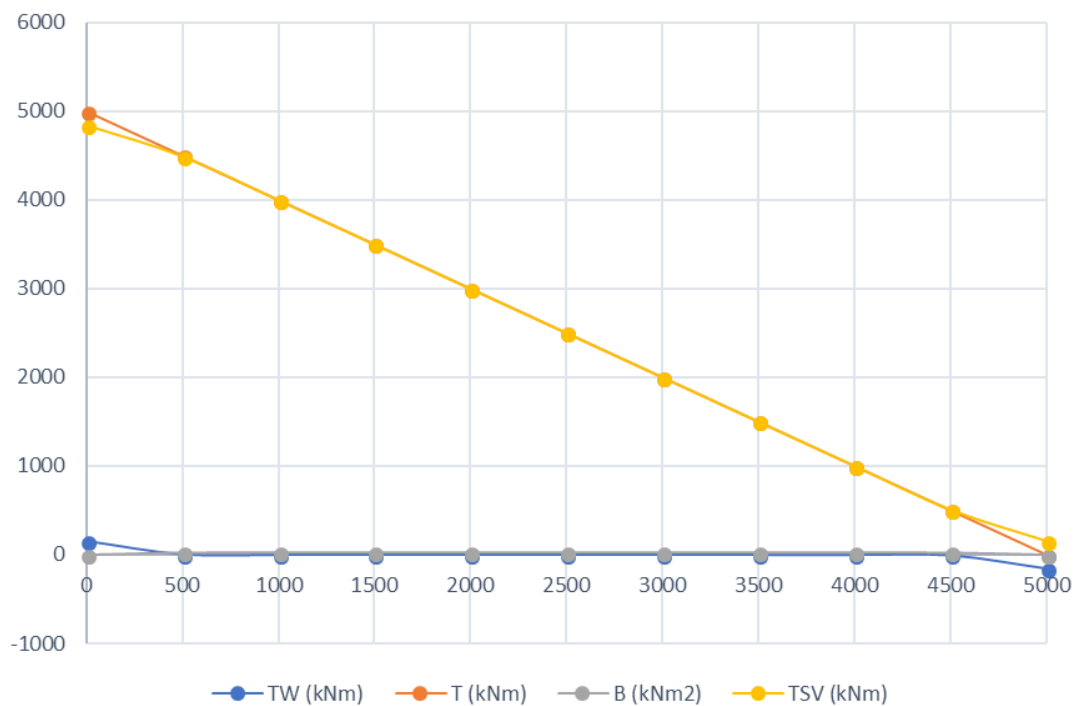


Gráfica 11: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 3.

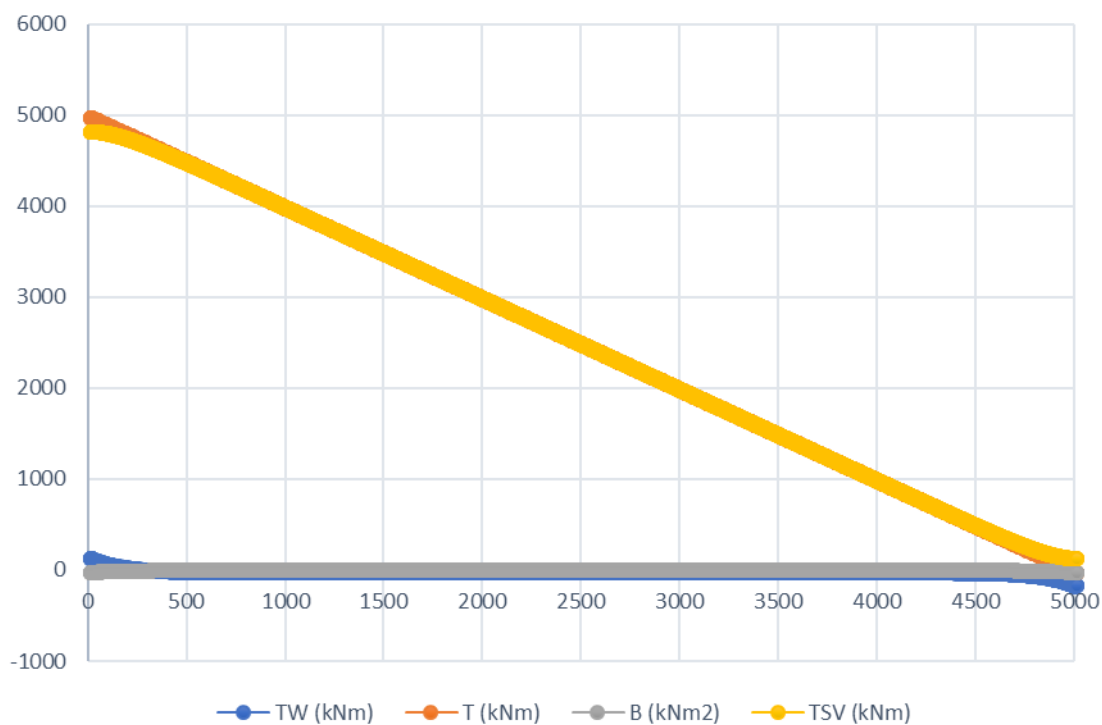


Gráfica 12: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos.

4) Caso Particular 4



Gráfica 13: Torsiones y bimomentos, obtenidos a partir de la solución analítica, de la viga del Caso Particular 4.



Gráfica 14: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos.

Como se puede observar, en las gráficas de todos los casos, los resultados de la solución analítica son muy parecidos a los resultados que proporciona el software. Pero para una mayor verificación se compararán datos numéricos obtenidos en los diferentes escenarios.

6.1.2. Comparación de resultados

Finalmente, se presenta una tabla resumen con los cuatro casos particulares en los diferentes escenarios obtenidos: con la solución analítica y con los resultados obtenidos en el software con distintas aproximaciones: 10, 50 y 500 elementos.

Para cada caso particular se han elegido los valores de referencia de más interés en función de cada caso. Para los casos particulares 1 y 3 se seleccionan como valores de referencia el torsor y el bimomento en el extremo inicial de la viga. En cambio, en los casos 2 y 4 los valores de referencia que serán el torsor en el inicio de la viga y el bimomento en el punto medio de la viga.

	<i>Software</i>							
	<i>Exacto</i>		<i>Nº elementos = 10</i>		<i>Nº elementos = 50</i>		<i>Nº elementos = 500</i>	
Caso	<i>T (kNm)</i>	<i>B (kNm²)</i>	<i>T (kNm)</i>	<i>B (kNm²)</i>	<i>T (kNm)</i>	<i>B (kNm²)</i>	<i>T (kNm)</i>	<i>B (kNm²)</i>
1	2500,00	-359,90	2250,00	-342,02	2450,00	-359,07	2495,00	-359,89
2	2500,00	23,52	2250,00	41,40	2450,00	24,35	2495,00	23,53
3	5000,00	-743,31	4750,00	-725,43	4950,00	-742,49	4995,00	-743,31
4	5000,00	23,52	4750,00	41,40	4950,00	24,35	4995,00	23,53

Tabla 20: Comparación de los valores de referencia de todos los casos particulares.

Como se puede observar en la *Tabla 20*, los valores se van acercando al resultado exacto a medida que aumenta el número de elementos. Llegando a ser iguales, en algunos casos, los resultados obtenidos a partir de la solución analítica a los resultados obtenidos en el software con 500 elementos.

6.2. Ejercicio para verificar el software

Para realizar la segunda verificación del software utilizaremos un ejercicio resuelto obtenido del libro de Kollbrunner y Basler ⁽⁴⁾.

6.2.1. Enunciado del ejercicio

Considerando la viga simétrica, continua y prismática mostrada en la *Figura 17*.

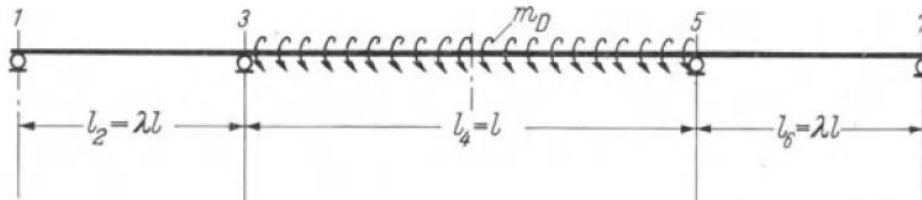


Figura 17: Viga continua sometida a un momento torsor uniforme m_D .

Las propiedades torsionales están descritas por los siguientes parámetros:

$$\chi_4 = \sqrt{\frac{l^2 \cdot G \cdot I_T}{E \cdot I_w}} \quad \chi_2 = \lambda \cdot \chi_4$$

Donde, para este ejercicio, el valor de χ_4 es igual a 3 y el valor de λ es igual a $\frac{1}{2}$.

6.2.2. Datos a introducir en el software

Para que estas propiedades se cumplan, hemos seleccionado los valores que se muestran en la *Tabla 21*.

G	80000	N/mm ²
E	200000	N/mm ²
I_T	1969	mm ⁴
I_w	87500000	mm ⁶
L	2000	mm

Tabla 21: Propiedades del ejercicio.

Al elegir un valor de longitud de viga de 2000 mm. Se obtienen las coordenadas en los apoyos siguientes:

- Apoyo 1: $L = 0 \text{ mm}$.
- Apoyo 3: $L = 500 \text{ mm}$.
- Apoyo 5: $L = 1500 \text{ mm}$.
- Apoyo 7: $L = 2000 \text{ mm}$.

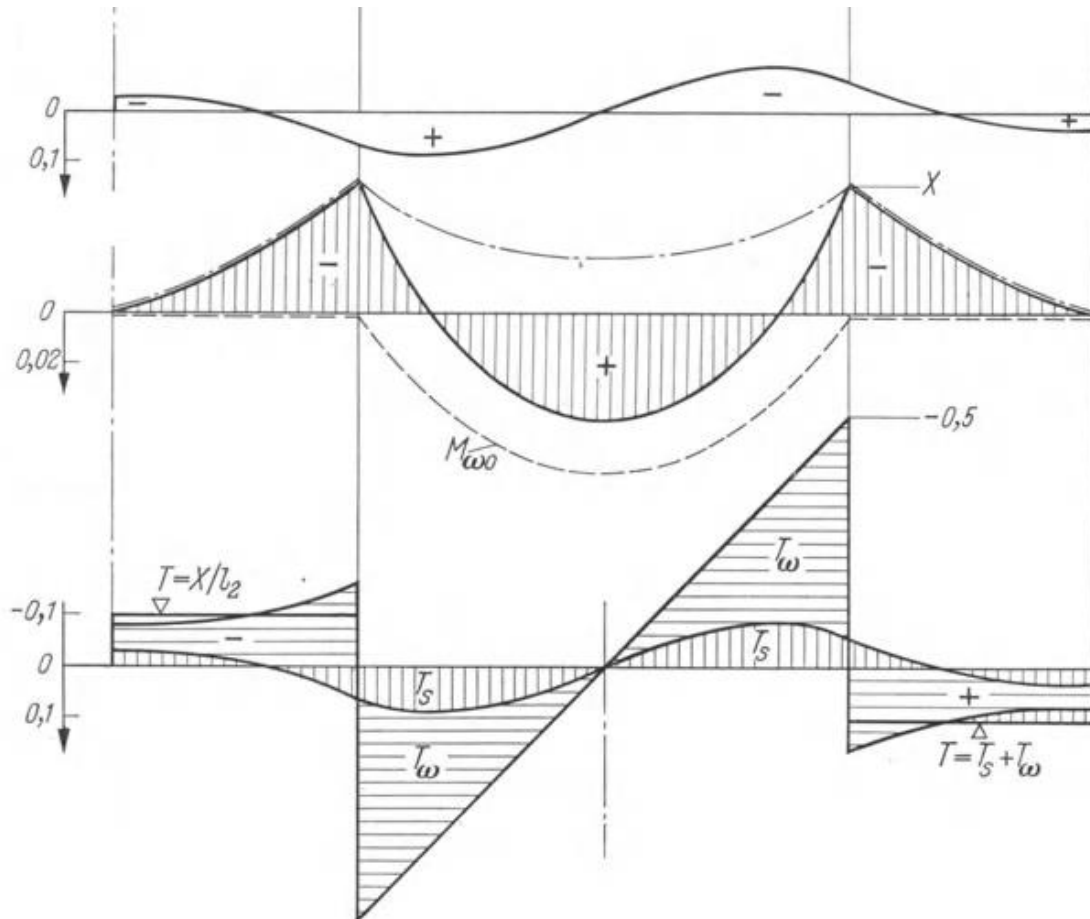
En los apoyos el giro está restringido. Entonces en los nodos correspondientes a los apoyos introduciremos en el software en la columna θ el valor 1.

Y el momento torsor, que va del apoyo 3 al 5, le daremos un valor de -1 kNm/m .

Para que el resultado sea preciso, y como se ha visto en el apartado anterior que lo más preciso sería un número de elementos de tres cifras, y para que las coordenadas de los nodos coincidan con los apoyos utilizaremos un número de elementos igual a 200.

6.2.3. Resultados del libro

La *Gráfica 15*, obtenida del libro ⁽⁴⁾, muestra los resultados del ejercicio en tres gráficas: la primera, la torsión de Saint-Venant a lo largo de la viga; la segunda, el bimomento a lo largo de la viga y, por último, una gráfica que muestra la torsión total, resultado de la suma de la torsión de Saint-Venant y la de alabeo.



Gráfica 15: Resultados del libro a lo largo de la viga:
a) Torsión de Saint-Venant; b) Bimomento; c) Torsión total.

Según el libro ⁽⁴⁾, la resultante del bimomento en los apoyos 3 y 5 será:

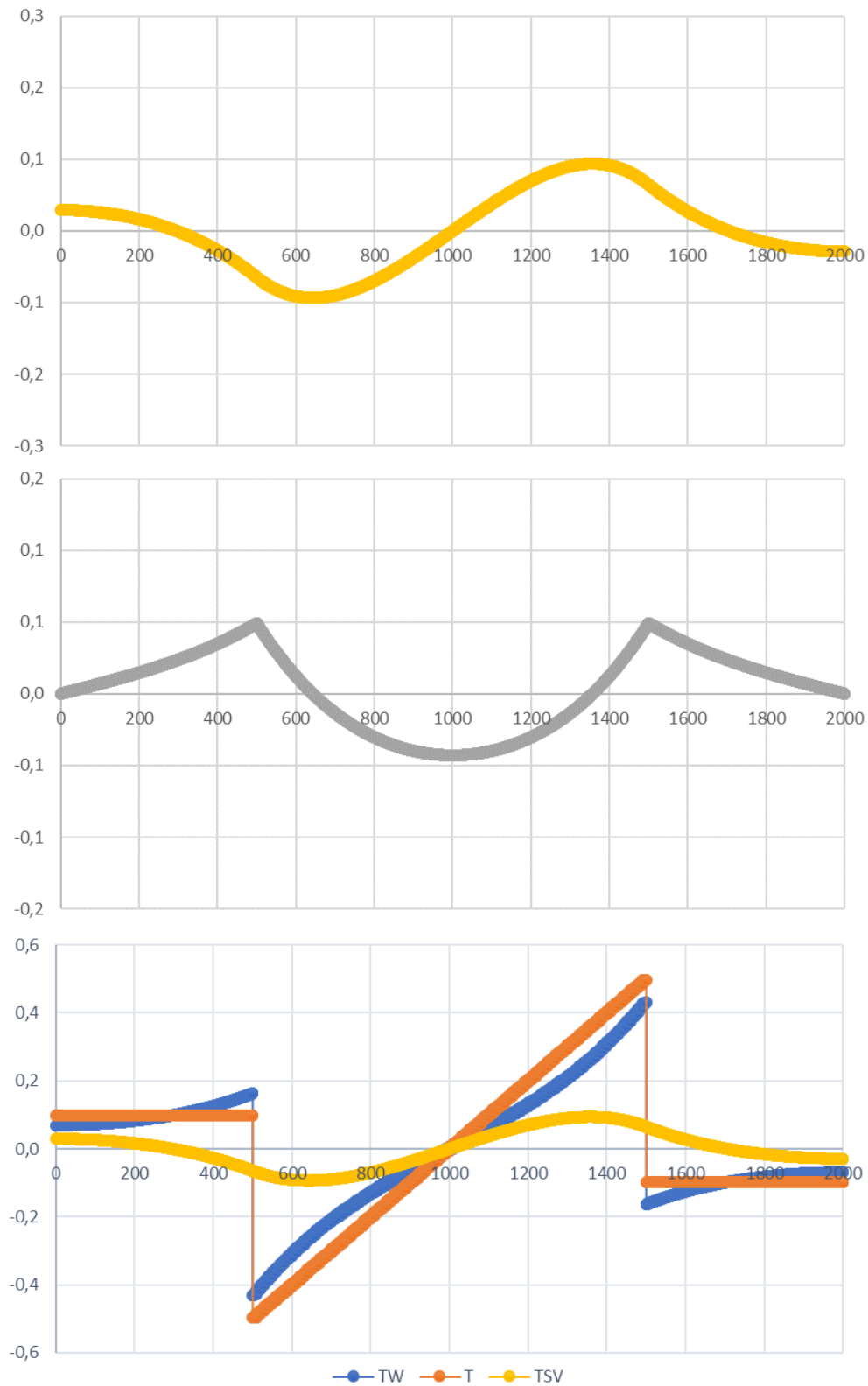
$$X = -0,0492 \cdot m_D \cdot l^2 \quad (83)$$

Donde m_D tiene un valor de -1 kNm/m , y l un valor de 1 m .

Procedemos a obtener los resultados del software, introduciendo los parámetros anteriormente indicados. Obteniendo los resultados gráficos mostrados en la *Gráfica 16* y los resultados numéricos en los apoyos de la *Tabla 22*.

6.2.1. Resultados del software

Procedemos a obtener los resultados del software, introduciendo los parámetros anteriormente indicados. Obteniendo los resultados gráficos mostrados en la *Gráfica 16* y los resultados numéricos en los apoyos de la *Tabla 22*.



Gráfica 16: Resultados del software:
a) Torsión de Saint-Venant; b) Bimomento; c) Torsión total.

x (mm)	T_{SV} (kNm ²)	T_w (kNm)	T (kNm)	B (kNm ²)
1	0,0291	0,0693	0,0984	0,0000
3 (izquierda)	-0,0647	0,1630	0,0984	0,0492
3 (derecha)	-0,0647	-0,4303	-0,4950	0,0492
5 (izquierda)	0,0647	0,4303	0,4950	0,0492
5 (derecha)	0,0647	-0,1630	-0,0984	0,0492
7	-0,0291	-0,0693	-0,0984	0,0000

Tabla 22: Resultados del software en los apoyos.

6.2.2. Comparación de resultados

Empezamos comparando la torsión de Saint-Venant, es decir, las *Gráficas 15.a* y *16.a*. En la *Gráfica 15.a*, el valor que podemos observar es el valor máximo del bimomento que corresponde a 0,1. Observando los resultados del software, en la *Gráfica 16.a*, el máximo del bimomento tiene un valor de 0,1. Por lo tanto, el valor del libro corresponde al resultado que nos proporciona el software.

A continuación, comparamos el bimomento, correspondiente a las *Gráfica 15.b* y *16.b*. Lo primero que se observa es que ambas gráficas tienen el mismo recorrido. El bimomento en las coordenadas de los apoyos 1 y 7 (0 y 2000 m) debería ser nulo, cosa que en ambas gráficas se cumple. Lo segundo que se observa en la *Gráfica 15.b* es el valor máximo del bimomento indicado como X , que sabemos por la *Ecuación X* que corresponde a:

$$X = -0,0492 \cdot (-1000) \cdot 1^2 = 0,0492 \cdot 10^3 \text{ Nm} = 0,0492 \text{ kNm}$$

Observando en la *Tabla 22* el valor del bimomento en el apoyo 3 y en el apoyo 5 tiene un valor de 0,0492, es decir, coinciden los resultados.

Por último, comparamos la torsión total, correspondiente las *Gráficas 15.c* y *16.c*. En la *Gráfica 15.c* se puede observar que el elemento que va del apoyo 1 al apoyo 3 tiene un valor de tensión total igual a:

$$T = \frac{X}{l_2} = \frac{-0,0492 \cdot (-1000) \cdot 1^2}{500} = 0,0984 \cdot 10^3 \text{ Nm} = 0,0984 \text{ kNm}$$

Si observamos la *Tabla 22* el valor que corresponde al elemento 1 es el valor de la tensión total del apoyo 1, es decir, el valor 0,0984 kNm. Por tanto, los valores coinciden.

Otro valor que se puede ver en la *Gráfica 15.c* es el máximo de la torsión que tiene un valor de 0,5 kNm. En la *Tabla 22* el valor que corresponde al valor máximo es la torsión total del apoyo 5 por la izquierda, es decir, el valor 0,4950 kNm. Los valores son muy próximos entre ellos.

Conclusiones

El trabajo desarrollado en el presente TFG contiene un fuerte componente de **Aprendizaje Autónomo**. La teoría de la torsión general no se contempló en las asignaturas cursadas durante el grado a excepción de una introducción a la torsión de St. Venant (uniforme) en secciones tubulares en Resistencia de Materiales. En consecuencia, se ha tenido que realizar un esfuerzo importante de estudio y comprensión de la torsión en su caso general. De este modo, se completa el conocimiento necesario para abordar estructuras metálicas reales donde la torsión es un componente importante en su diseño. Ello repercute en mi formación estructural y es un beneficio del desarrollo de este TFG.

Los conocimientos adquiridos no sólo permiten resolver problemas concretos, sino que se han implementado en un programa de cálculo que mediante Visual Basic se incorpora en una hoja de cálculo de Microsoft Excel. La programación de la resolución de vigas continuas sometidas a torsión tiene importantes beneficios: en primer lugar, como aprendizaje de programación; y, en segundo lugar, porque dicha herramienta, junto con la desarrollada para vigas continuas a flexión, quedará para los alumnos que cursarán la especialidad Mecánica en la EEBE. A este efecto, el CD que acompaña al TFG contiene el programa desarrollado para los alumnos que lo deseen.

En cuanto al desarrollo del programa, ha sido necesario obtener la matriz de rigidez de un elemento sometido a torsión general para poder aplicar el método directo de la rigidez a la tipología estructural escogida, la viga continua. Tanto la matriz de rigidez como la aplicación del método y su implementación en el programa de cálculo han sido verificadas exhaustivamente, primero con la resolución analítica de cuatro casos particulares y la verificación con un ejemplo resuelto en la literatura ⁽⁴⁾. Se tiene la garantía de la solución correcta de la torsión en vigas continuas implementada en la hoja de cálculo Excel.

Además, el código desarrollado ha sido comentado sentencia a sentencia para facilitar su comprensión y este esfuerzo puede ser útil a otros alumnos interesados en desarrollar sus programas en el entorno de Excel con VBA.

En el desarrollo de este TFG confluyen disciplinas tan diversas como Matemáticas, en la resolución de problemas de EDOs, Teoría de Estructuras, en la aplicación del método de la rigidez y Programación y Ofimática en cuanto al lenguaje Visual Basic y el entorno Excel. Por tanto, juntas se unen para dar solución a un problema concreto de gran interés para un ingeniero mecánico o estructural.

Presupuesto y Análisis Económico

Al ser este un proyecto donde todo el trabajo se puede realizar en su totalidad por un ingeniero, sin utilizar maquinas ni recursos externos, el presupuesto se basará en las partes en las que ha constado el desarrollo del software y el precio por hora, que varía en función del proceso que se ha desarrollado.

<i>Proceso</i>	<i>€/h</i>	<i>Horas</i>	<i>Precio total (€)</i>
Estudio previo y documentación	50	120	6000
Desarrollo de los cálculos	90	150	13500
Software para el análisis de vigas continuas a torsión	100	300	30000
Verificación del software	80	100	8000
Total		670	57500

Tabla 23: Coste del software.

Como se observa en la *Tabla 23*, el coste total del desarrollo del software, objeto de este Trabajo de fin de grado, ascendería a la cifra de 57.500 €.

Bibliografía

1. **Timoshenko, Stephen P. and Goodier, J. N.** *Theory of Elasticity*. Nueva York : McGraw-Hill, 1934.
2. **Vlasov, V. Z.** *Thin-Walled Elastic Beams*. U.S. Department of Commerce, Washington : National Technical Information Service, 1961.
3. **Kindmann, Rolf and Kraus, Matthias.** *Steel Structures: Design using FEM*. Berlin : Wilhelm Ernst & Sohn, 2011.
4. **Kollbrunner, Curt F. and Basler, Konrad.** *Torsion in Structures*. Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1969.
5. **Callister, William D.** *Introducción a la ciencia e ingeniería de los materiales*. Barcelona : Reverte, 2002 .
6. **Berrocal, Luis Ortiz.** *Resistencia de Materiales*. Madrid : McGraw Hill, 1990.
7. **Canet, Juan Miquel.** *Resistencia de Materiales y Estructuras*. Barcelona : CIMNE, 2012.
8. **Abdelraouf, Al-Sheikh.** *Behaviour of thin-walled structures under combined loads*. Loughborough : A.M.S. Al-Sheikh, 1985.
9. **Pilkey, Walter D. and Kitis, Levent.** *Notes on the Linear Analysis of Thin-walled Beams*. Charlottesville, Virginia : University of Virginia, 1996.
10. **Krahula, Joseph L.** *Analysis of Bent and Twisted Bars Using the Finite Element Method*. Connecticut : United Aircraft Corporation, 1966.
11. **Ruiz, Miguel Cervera and Blanco Díaz, Elena.** *Mecánica de estructuras*. Barcelona : UPC, 2001.
12. **Galambos, Theodore V.** *Structural Members and Frames*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1968.
13. *An stiffness coefficients proposal for thin walled open beams.* **Sibaja, Alejandro Ruiz and Manterola, Osear Bonilla.** 3, Chiapas : Téc. Ing. Univ. Zulla., 2006, Vol. 29.
14. *Bimoment contribution to stability of thin-walled assemblages.* **Yoo, Chai Hong.** pp. 465-471, Great Britain : Computers & Structures, 1980, Vol. 11.
15. **Yoo, Chai H. and Lee, Sung C.** *Stabilitu of Dtructures: Principles and applications*. Burlington : Elsevier, 2011.
16. *Method for including restrained warping in traditional frame analyses.* **Hoogenboom, P.C.J. and Borgart, A.** 1, Delft : Heron, 2005, Vol. 50.
17. **Pilkey, Walter D. and Kitis, Levent.** *Notes on the Linear Analysis of Thin-walled Beams*. Charlotesville : Department of Mechanical Engineering, University of Virginia, 1996.
18. *Structural analysis of assemblages of thin-walled members.* **Baigent, A. H. and Hancock, G. J.** July, Sydney : Eng. Struct., 1982, Vol. 4.

19. *Torsional Properties of Open Cross Sections*. **Heinnst, C. P. and Wang, R. C.** pp. 495-500, Great Britain : Computers & Structures, 1978, Vol. 9.
20. **Bottero, Cristian, Actis, Marcos D. and Patanella, Alejandro J.** *Estructuras IV: Torsión en barras de pared delgada*. La Plata : Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de La Plata, 2007.
21. **Massa, J., J.Giro and Giudici, A.** *Cálculo Estructural II*. Córdoba : FCEFyN, 2015.
22. **Haukaas, Terje.** *Warping Torsion*. Vancouver : University of British Columbia, 2017.

Enlaces útiles

Visual Basic Guide: <https://docs.microsoft.com/en-us/dotnet/visual-basic/index>

Wolfram Alpha: <http://www.wolframalpha.com/>

Datos necesarios

Para el correcto funcionamiento del software los datos necesarios relativos a las características de la viga serán los siguientes:

- Número de nodos de la viga.
- Módulo de cizalladura, G , y módulo de Young, E .
- Inercia de torsión, I_T , e inercia de alabeo, I_w .
- Longitud de la viga, L .

Estos datos se deben introducir, con las unidades indicadas, en las casillas, marcadas en amarillo, correspondientes:

Nº of nodes	
Nº of elements	
G	N/mm^2
E	N/mm^2
I_T	mm^4
I_w	mm^6
λ	
L	mm
λL	

El valor correspondiente al número de elementos se mostrará automáticamente una vez introducido el número de nodos. Así como, una vez introducidas las variables de G , E , I_T e I_w se mostrará automáticamente λ , y, lo mismo, con λL , una vez introducido el valor de L .

A continuación, aparecerán los nodos y los elementos en las tablas inferiores, en función de la cantidad de nodos introducidos, tal que así:

Node	Coordinate	Nodal actions		Contour	
	x (mm)	T (kNm)	B (kNm ²)	θ	θ'
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Element	Node 1	Node 2	m (kNm/mm)
1	1	2	
2	2	3	
3	3	4	
4	4	5	
5	5	6	
6	6	7	
7	7	8	
8	8	9	
9	9	10	
10	10	11	
11	11	12	
12	12	13	
13	13	14	
14	14	15	
15	15	16	
16	16	17	
17	17	18	
18	18	19	
19	19	20	
20	20	21	

En la columna “**Coordinate: x (mm)**” se debe introducir las coordenadas en el eje x de cada uno de los nodos, siendo la diferencia entre el ultimo nodo y el primero el valor de la longitud de la viga.

En la columna “**Nodal actions**” se debe indicar en cada nodo a que esfuerzo torsor, en la columna “ **T (kNm)**”, y bimomento, en la columna “ **B (kNm²)**”, está sometido el nodo. Si no existe torsor o bimomento en ese nodo, se debe dejar vacío.


En la columna “**Contour**” se debe indicar las restricciones de giro y alabeo de cada nodo. En la primera columna de estas, es decir, en la columna “ θ ” se debe poner si el giro está restringido en ese nodo el valor 1 y si no está restringido el valor 0. Lo mismo para la columna “ θ' ” que corresponde al alabeo.

Las restricciones de giro y alabeo vienen determinadas por el tipo de apoyo en el que se encuentra el nodo. A continuación, ejemplos de los valores que se deben introducir en las columnas “**Contour**” en función de los apoyos:

- Si el nodo se encuentra **empotrado** significará que ese nodo tiene el giro y el alabeo restringido. Por lo que, tanto en la columna “ θ ”, correspondiente al giro, como en la columna “ θ' ”, correspondiente al alabeo, se debe introducir el valor 1, indicando que ambos, el giro y el alabeo, están restringidos.
- Si el nodo se encuentra **apoyado en una horquilla** significará que ese nodo tiene el giro restringido y, por el contrario, que el alabeo no está restringido. Por tanto, en la columna “ θ ”, correspondiente al giro, se debe introducir el valor 1, indicando que el giro está restringido, en cambio, en la columna “ θ' ”, correspondiente al alabeo, se debe introducir el valor 0, indicando que el alabeo no se encuentra restringido.
- Si el nodo se encuentra **libre** significará que ese nodo no tiene ni el giro ni el alabeo restringido. Por lo que, tanto en la columna “ θ ”, correspondiente al giro, como en la columna “ θ' ”, correspondiente al alabeo, se debe introducir el valor 0, indicando que ambos, el giro y el alabeo, no están restringidos.

En la columna “ **m (kNm/m)**” se debe introducir el momento torsor constante al que cada elemento está sometido. Si el elemento no está sometido a ningún momento torsor constante la casilla de esta columna correspondiente al elemento se puede dejar en blanco

Una vez todos los datos están introducidos correctamente, se deberá pulsar el botón “Calculate”, marcado con un rectángulo azul:



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

THIN-WALLED ELEMENT

[Continuous Beams]

Nº of nodes		
Nº of elements		
G	N/mm ⁴	
E	N/mm ²	
I _y	mm ⁴	
I _w	mm ⁴	

λ		
L	mm	
λL		

CALCULATE

Node	Coordinate	Nodal actions		Contour	
	x (mm)	T (kNm)	B (kNm ²)	θ	θ'

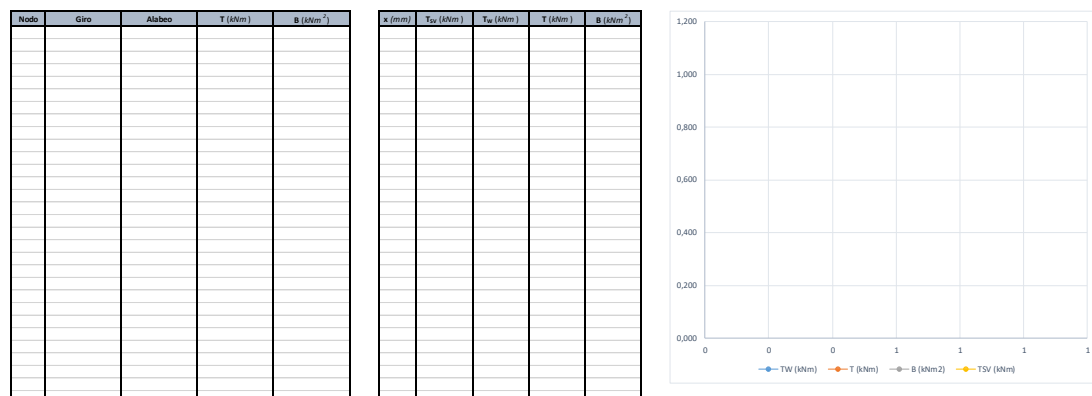
Element	Node 1	Node 2	m (kNm/m)

Resultados

Una vez apretado el botón “Calculate”, se debe ir a la segunda hoja de Excel, llamada “Results”, marcada con un rectángulo azul a continuación:

[illegible]

Una vez vayamos a la segunda hoja del Excel, la hoja “Results”, nos aparecerá lo siguiente:



Estos serán los resultados que el software proporciona, organizado de la siguiente manera:

- En la primera tabla: para cada nodo, los valores de los desplazamientos, giro y alabeo, y los valores de tensión y bimomento.
- En la segunda tabla: para cada coordenada los valores de la torsión de Saint-Venant, la torsión de alabeo y la torsión total, así como el valor del bimomento.
- La gráfica: corresponde a la representación gráfica de la viga con las torsiones y bimomento a las que esta se ve sometida en cada punto de su longitud.

Anexo

[A1] Módulos de elasticidad y de cizalladura

<i>Metal o aleación</i>	<i>Módulo de elasticidad [E]</i>		<i>Módulo de cizalladura [G]</i>	
	<i>psi · 10⁶</i>	<i>mm⁴ · 10⁶</i>	<i>psi · 10⁶</i>	<i>mm⁴ · 10⁶</i>
Aluminio	10,0	6,9	3,8	2,6
Latón	14,6	10,1	5,4	3,7
Cobre	16,0	11,0	6,7	4,6
Magnesio	6,5	4,5	2,5	1,7
Níquel	30,0	20,7	11,0	7,6
Acero	30,0	20,7	12,0	8,3
Titanio	15,5	10,7	6,5	4,5
Tungsteno	59,0	40,7	23,2	16,0

Tabla 24: Módulos de elasticidad y de cizalladura a T_{amb} para varios metales y aleaciones.

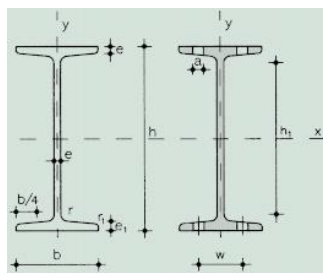
La Tabla 24, obtenida del libro Callister ⁽⁵⁾, muestra los módulos de elasticidad y de cizalladura a temperatura ambiente para varios metales y aleaciones.

[A2] Tablas de perfiles

Perfiles IPN

Su sección tiene forma de doble T. Las caras exteriores de las alas son perpendiculares al alma y las interiores presentan una inclinación del 14 por 100 respecto a las exteriores, por lo que las alas tienen espesor decreciente hacia los bordes. Las uniones entre las caras del alma y las caras interiores de las alas son redondeadas. Las alas tienen el borde con arista exterior viva e interior redondeada.

Las dimensiones y los términos de sección de los perfiles IPN se detallan en la *Tabla 25* y coinciden con los de la norma UNE 36 521.



A = Área de la sección	I_t = Módulo de torsión de la sección
S_x = Momento estático de media sección, respecto a X	I_a = Módulo de alabeo de la sección
I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X	u = Perímetro de la sección
$W_x = 2I_x : h$: h. Módulo resistente de la sección, respecto a X	a = Diámetro del agujero del roblón normal
$i_x = \sqrt{I_x : A}$: Radio de giro de la sección, respecto a X	w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros
I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y	h_1 = Altura de la parte plana del alma
$W_y = 2I_y : b$: b. Módulo resistente de la sección, respecto a Y	e_2 = Espesor del ala en el eje del agujero
$i_y = \sqrt{I_y : A}$: Radio de giro de la sección, respecto a Y	p = Peso por m

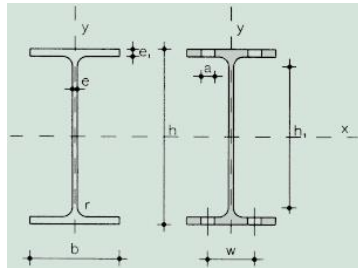
Perfil	Dimensiones							Términos de sección										Agujeros			Peso
	h mm	b mm	e=r mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	I _a cm ⁶	w mm	a mm	e ₂ mm	p kp/m
IPN 80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	304	7,58	11,4	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	0,93	87,5	22	—	4,43	5,95 C
IPN 100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	370	10,60	19,9	171,0	34,2	4,01	12,20	4,88	1,07	1,72	268,0	28	—	5,05	8,32 P
IPN 120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	439	14,20	31,8	328,0	54,7	4,81	21,50	7,41	1,23	2,92	685,0	32	—	5,67	11,20 P
IPN 140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	502	18,30	47,7	573,0	81,9	5,61	35,20	10,70	1,40	4,66	1.540,0	34	11	6,29	14,40 P
IPN 160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	575	22,80	68,0	935,0	117,0	6,40	54,70	14,80	1,55	7,08	3.138,0	40	11	6,91	17,90 P
IPN 180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	640	27,90	93,4	1.450,0	161,0	7,20	81,30	19,80	1,71	10,30	5.924,0	44	13	7,53	21,90 P
IPN 200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	709	33,50	125,0	2.140,0	214,0	8,00	117,00	26,00	1,87	14,60	10.520,0	48	13	8,15	26,30 P
IPN 220	220	98	8,1	12,2	4,9	175	775	39,60	162,0	3.060,0	278,0	8,80	162,00	33,10	2,02	20,10	17.760,0	52	13	8,77	31,10 P
IPN 240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	844	46,10	206,0	4.250,0	354,0	9,59	221,00	41,70	2,20	27,00	28.730,0	56	17	9,39	36,20 P
IPN 260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	906	53,40	257,0	5.740,0	442,0	10,40	288,00	51,00	2,32	36,10	44.070,0	60	17	10,15	41,90 P
IPN 280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	966	61,10	316,0	7.590,0	542,0	11,10	364,00	61,20	2,45	47,80	64.580,0	62	17	11,04	48,00 P
IPN 300	300	125	10,8	16,2	6,5	241	1.030	69,10	381,0	9.800,0	653,0	11,90	451,00	72,20	2,56	61,20	91.850,0	64	21	11,83	54,20 P
IPN 320	320	131	11,5	17,3	6,9	257	1.090	77,80	457,0	12.510,0	782,0	12,70	555,00	84,70	2,67	78,20	128.800,0	70	21	12,72	61,10 P
IPN 340	340	137	12,2	18,3	7,3	274	1.150	86,80	540,0	15.700,0	923,0	13,50	674,00	98,40	2,80	97,50	176.300,0	74	21	13,51	68,10 P
IPN 360	360	143	13,0	19,5	7,8	290	1.210	97,10	638,0	19.610,0	1.090,0	14,20	818,00	114,00	2,90	123,00	240.100,0	76	23	14,50	76,20 P
IPN 380	380	149	13,7	20,5	8,2	306	1.270	107,00	741,0	24.010,0	1.260,0	15,00	975,00	131,00	3,02	150,00	318.700,0	82	23	15,29	84,00 P
IPN 400	400	155	14,4	21,6	8,6	323	1.330	118,00	857,0	29.210,0	1.460,0	15,70	1.160,00	149,00	3,13	183,00	419.600,0	86	23	16,18	92,60 P
IPN 450	450	170	16,2	24,3	9,7	363	1.478	147,00	1.200,0	45.850,0	2.040,0	17,70	1.730,00	203,00	3,43	288,00	791.100,0	94	25	18,35	115,00 P
IPN 500	500	185	18,0	27,0	10,8	404	1.626	180,00	1.620,0	68.740,0	2.750,0	19,60	2.480,00	268,00	3,72	449,00	1.403.000,0	100	28	20,53	141,00 P
IPN 550	550	200	19,0	30,0	11,9	445	1.787	213,00	2.120,0	99.180,0	3.610,0	21,60	3.490,00	349,00	4,02	618,00	2.389.000,0	110	28	23,00	167,00 P
IPN 600	600	215	21,6	32,4	13,0	485	1.924	254,00	2.730,0	139.000,0	4.630,0	23,40	4.670,00	434,00	4,30	875,00	3.821.000,0	120	28	24,88	199,00 P

Tabla 25: Dimensiones y términos de sección de los perfiles IPN.

Perfiles IPE

Su sección tiene forma de doble T. Las caras exteriores e interiores de las alas son paralelas entre sí y perpendiculares al alma, y así las alas tienen espesor constante. Las uniones entre las caras del alma y las caras interiores de las alas son redondeadas. Las alas tienen el borde con aristas exteriores e interiores vivas. La relación entre la anchura de las alas y la altura del perfil se mantiene menor que 0,66.

Las dimensiones y los términos de sección de los perfiles IPE se detallan en la *Tabla 26* y coinciden con los de la norma UNE 36 526.



A = Área de la sección	I_x = Módulo de torsión de la sección
S_x = Momento estático de media sección, respecto a X	I_x = Módulo de alabeo de la sección
I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X	u = Perímetro de la sección
$W_x = 2I_x : h$. Módulo resistente de la sección, respecto a X	a = Diámetro del agujero del roblón normal
$i_x = \sqrt{I_x : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a X	w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros
I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y	h_1 = Altura de la parte plana del alma
$W_y = 2I_y : b$. Módulo resistente de la sección, respecto a Y	p = Peso por m
$i_y = \sqrt{I_y : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y	

Perfil	Dimensiones							Términos de sección										Agujeros			Peso	
	h mm	b mm	e mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	I _a cm ⁶	w mm	a mm	e ₂ mm	p kp/m	
IPE 80	80	46	3,8	5,2	5	60	328	7,64	11,6	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	0,721	118	—	—	3,8	6,00	C
IPE 100	100	55	4,1	5,7	7	75	400	10,30	19,7	171,0	34,2	4,07	15,90	5,79	1,24	1,140	351	—	—	4,1	8,10	C
IPE 120	120	64	4,4	6,3	7	93	475	13,20	30,4	318,0	53,0	4,90	27,70	8,65	1,45	1,770	890	35	—	4,4	10,40	C
IPE 140	140	73	4,7	6,9	7	112	551	16,40	44,2	541,0	77,3	5,74	44,90	12,30	1,65	2,630	1.981	40	11	4,7	12,90	C
IPE 160	160	82	5,0	7,4	9	127	623	20,10	61,9	869,0	109,0	6,58	68,30	16,70	1,84	3,640	3.959	44	13	5,0	15,80	P
IPE 180	180	91	5,3	8,0	9	146	698	23,90	83,2	1.320,0	146,0	7,42	101,00	22,20	2,05	5,060	7.431	48	13	5,3	18,80	P
IPE 200	200	100	5,6	8,5	12	159	788	28,50	110,0	1.940,0	194,0	8,26	142,00	28,50	2,24	6,670	12.990	52	13	5,6	22,40	P
IPE 220	220	110	5,9	9,2	12	178	848	33,40	143	2.770	252	9,11	205	37,3	2,48	9,15	22.670	58	17	5,9	26,20	P
IPE 240	240	120	6,2	9,8	15	190	922	39,10	183	3.890	324	9,97	284	47,3	2,69	12,00	37.390	65	17	6,2	30,70	P
IPE 270	270	135	6,6	10,2	15	220	1.040	45,90	242	5.790	429	11,20	420	62,2	3,02	15,40	70.580	72	21	6,6	36,10	P
IPE 300	300	150	7,1	10,7	15	249	1.160	53,80	314	8.360	557	12,50	604	80,5	3,35	20,10	125.900	80	23	7,1	42,20	P
IPE 330	330	160	7,5	11,5	18	271	1.250	62,60	402	11.770	713	13,70	788	98,5	3,55	26,50	199.100	85	25	7,5	49,10	P
IPE 360	360	170	8,0	12,7	18	299	1.350	72,70	510	16.270	904	15,00	1.040	123,0	3,79	37,30	313.600	90	25	8,0	57,10	P
IPE 400	400	180	8,6	13,5	21	331	1.470	84,50	654	23.130	1.160	16,50	1.320	146,0	3,95	48,30	490.000	95	28	8,6	66,30	P
IPE 450	450	190	9,4	14,6	21	379	1.610	98,80	851	33.740	1.500	18,50	1.680	176,0	4,12	65,90	791.000	100	28	9,4	77,60	P
IPE 500	500	200	10,2	16,0	21	426	1.740	116,00	1.100	48.200	1.930	20,40	2.140	214,0	4,31	91,80	1.249.000	110	28	10,2	90,70	P
IPE 550	550	210	11,1	17,2	24	468	1.880	134,00	1.390	67.120	2.440	22,30	2.670	254,0	4,45	122,00	1.884.000	115	28	11,1	106,00	C
IPE 600	600	220	12,0	19,0	24	514	2.010	155,00	1.760	92.080	3.070	24,30	3.390	308,0	4,66	172,00	2.846.000	120	28	12,0	122,0	C

Tabla 26: Dimensiones y términos de sección de los perfiles IPE.

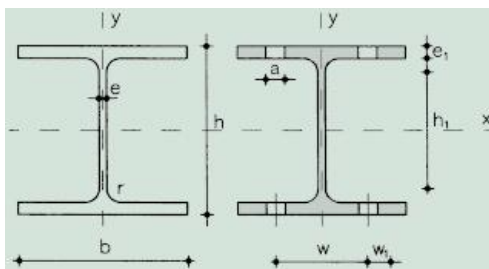
Perfil HE

Su sección tiene forma de doble T. Las caras exteriores e interiores de las alas son paralelas entre sí y perpendicular al alma, y así las alas tienen espesor constante. Las uniones entre las caras del alma y las caras interiores de las alas son redondeadas. Las alas tienen el borde con aristas exteriores e interiores vivas.

Los perfiles HE comprenden las tres series siguientes, cuyas dimensiones y términos de sección se detallan en la *Tabla 27*:

- Serie normal: HEB
- Serie ligera: HEA
- Serie pesada: HEM

Coinciden respectivamente con los de las normas UNE 36 527, UNE 36 528 y UNE 36 529.



A = Área de la sección	I_t = Módulo de torsión de la sección
S_x = Momento estático de media sección, respecto a X	I_{α} = Módulo de alabeo de la sección
I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X	u = Perímetro de la sección
$W_x = 2I_x : h$: Módulo resistente de la sección, respecto a X	a = Diámetro del agujero del roblón normal
$i_x = \sqrt{I_x : A}$: Radio de giro de la sección, respecto a X	w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros
I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y	h_1 = Altura de la parte plana del alma
$W_y = 2I_y : b$: Módulo resistente de la sección, respecto a Y	p = Peso por m
$i_y = \sqrt{I_y : A}$: Radio de giro de la sección, respecto a Y	

Perfil	Dimensiones							Términos de sección										Agujeros			Peso
	h mm	b mm	e mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	I _α cm ⁸	w mm	w ₁ mm	a mm	p kg/m
HEB 100	100	100	6,0	10,0	12	56	567	26,0	52,1	450	90	4,16	167	33	2,53	9,34	3.375	55	—	13	20,4 P
HEB 120	120	120	6,5	11,0	12	74	686	34,0	82,6	864	144	5,04	318	53	3,06	14,90	9.410	65	—	17	26,7 P
HEB 140	140	140	7,0	12,0	12	92	805	43,0	123,0	1.509	216	5,93	550	79	3,58	22,50	22.480	75	—	21	33,7 P
HEB 160	160	160	8,0	13,0	15	104	918	54,3	177,0	2.492	311	6,78	889	111	4,05	33,20	47.940	85	—	23	42,6 P
HEB 180	180	180	8,5	14,0	15	122	1.040	65,3	241,0	3.831	426	7,66	1.363	151	4,57	46,50	93.750	100	—	25	51,2 P
HEB 200	200	200	9,0	15,0	18	134	1.150	78,1	321,0	5.696	570	8,54	2.003	200	5,07	63,40	171.100	110	—	25	61,3 P
HEB 220	220	220	9,5	16,0	18	152	1.270	91,0	414,0	8.091	736	9,43	2.843	258	5,59	84,40	295.400	120	—	25	71,5 P
HEB 240	240	240	10,0	17,0	21	164	1.380	106,0	527,0	11.259	938	10,30	3.923	327	6,08	110,00	486.900	90	35	25	83,2 P
HEB 260	260	260	10,0	17,5	24	177	1.500	118,4	641,0	14.919	1.150	11,20	5.135	395	6,58	130,00	753.700	100	40	25	93,0 P
HEB 280	280	280	10,5	18,0	24	196	1.620	131,4	767,0	19.270	1.380	12,10	6.595	471	7,09	153,00	1.130.000	110	45	25	103,0 P
HEB 300	300	300	11,0	19,0	27	208	1.730	149,1	934,0	25.166	1.680	13,00	8.563	571	7,58	192,00	1.688.000	120	50	25	117,0 P
HEB 320	320	300	11,5	20,5	27	225	1.770	161,3	1.070,0	30.823	1.930	13,80	9.239	616	7,57	241,00	2.069.000	120	50	25	127,0 P
HEB 340	340	300	12,0	21,5	27	243	1.810	170,9	1.200,0	36.656	2.160	14,60	9.690	646	7,53	278,00	2.454.000	120	50	25	134,0 P
HEB 360	300	300	12,5	22,5	27	261	1.850	180,6	1.340,0	43.193	2.400	15,50	10.140	676	7,49	320,00	2.883.000	120	50	25	142,0 P
HEB 400	400	300	13,5	24,0	27	298	1.930	197,8	1.620,0	57.680	2.880	17,10	10.819	721	7,40	394,00	3.817.000	120	50	25	155,0 P
HEB 450	450	300	14,0	26,0	27	344	2.030	218,0	1.990,0	79.887	3.550	19,10	11.721	781	7,33	500,00	5.258.000	120	50	25	171,0 P
HEB 500	500	300	14,5	28,0	27	390	2.120	238,6	2.410,0	107.176	4.290	21,20	12.624	842	7,27	625,00	7.018.000	120	45	28	187,0 C
HEB 550	550	300	15,0	29,0	27	438	2.220	254,1	2.800,0	136.691	4.970	23,20	13.077	872	7,17	701,00	8.856.000	120	45	28	199,0 C
HEB 600	600	300	15,5	30,0	27	486	2.320	270,0	3.210,0	171.041	5.700	25,20	13.530	902	7,08	783,00	10.965.000	120	45	28	212,0 C

(continúa)

(continuación)

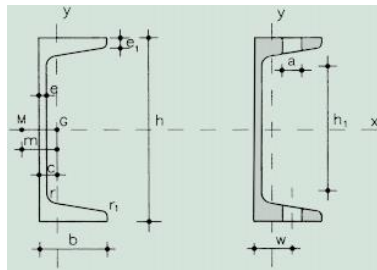
Perfil	Dimensiones							Términos de sección										Agujeros			Peso	
	h mm	b mm	e mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	I _a cm ⁶	w mm	w ₁ mm	a mm	p kg/m	
HEA 100	96	100	5,0	8,0	12	56	561	21,2	41,5	349	73	4,06	134	27	2,51	4,83	2.581	55	—	13	16,7	C
HEA 120	114	120	5,0	8,0	12	74	677	25,3	59,7	606	106	4,89	231	38	3,02	5,81	6.472	65	—	17	19,9	C
HEA 140	133	140	5,5	8,5	12	92	794	31,4	86,7	1.033	155	5,73	389	56	3,52	8,22	15.060	75	—	21	24,7	C
HEA 150	152	160	6,0	9,0	15	104	906	38,8	123,0	1.673	220	6,57	616	77	3,98	11,30	31.410	85	—	23	30,4	C
HEA 180	171	180	6,0	9,5	15	122	1020	45,3	162,0	2.510	294	7,45	925	103	4,52	14,70	60.210	100	—	25	35,5	C
HEA 200	190	200	6,5	10,0	18	134	1140	53,8	215,0	3.692	389	8,28	1.336	134	4,98	19,20	108.000	110	—	25	42,3	C
HEA 220	210	220	7,0	11,0	18	152	1260	64,3	284,0	5.410	515	9,17	1.955	178	5,51	28,00	193.300	120	—	25	50,5	C
HEA 240	230	240	7,5	12,0	21	164	1370	76,8	372,0	7.763	675	10,10	2.769	231	6,00	39,40	328.500	90	35	25	60,3	C
HEA 260	250	260	7,5	12,5	24	177	1480	86,8	460,0	10.455	836	11,00	3.668	282	6,50	47,80	516.400	100	40	25	68,2	C
HEA 280	270	280	8,0	13,0	24	196	1600	97,3	556,0	13.673	1.010	11,90	4.763	340	7,00	58,30	785.400	110	45	25	76,4	C
HEA 300	290	300	8,5	14,0	27	208	1720	112,5	692,0	18.263	1.260	12,70	6.310	421	7,49	77,70	1.200.000	120	50	25	88,3	C
HEA 320	310	300	9,0	15,5	27	225	1760	124,4	814,0	22.928	1.480	13,60	6.985	466	7,49	105,00	1.512.000	120	50	25	97,6	C
HEA 340	330	300	9,5	16,5	27	243	1790	133,5	925,0	27.693	1.680	14,40	7.436	496	7,46	127,00	1.824.000	120	50	25	105,0	C
HEA 360	350	300	10,0	17,5	27	261	1830	142,8	1.040,0	33.090	1.890	15,20	7.887	526	7,43	152,00	2.177.000	120	50	25	112,0	C
HEA 400	390	300	11,0	19,0	27	298	1910	159,0	1.280,0	45.069	2.310	16,80	8.564	571	7,34	197,00	2.942.000	120	50	25	125,0	C
HEA 450	440	300	11,5	21,0	27	344	2010	178,0	1.610,0	63.722	2.900	18,90	9.465	631	7,29	265,00	4.148.000	120	50	25	140,0	C
HEA 500	490	300	12,0	23,0	27	390	2110	197,5	1.970,0	86.975	3.550	21,00	10.367	691	7,24	347,00	5.643.000	120	45	28	155,0	C
HEA 550	540	300	12,5	24,0	27	438	2210	211,8	2.310,0	111.932	4.150	23,00	10.819	721	7,15	398,00	7.189.000	120	45	28	166,0	C
HEA 600	590	300	13,0	25,0	27	486	2310	226,5	2.680,0	141.208	4.790	25,00	11.271	751	7,05	454,00	8.978.000	120	45	28	178,0	C
HEM 100	120	106	12,0	20,0	12	56	619	53,2	118,0	1.143	190	4,63	399	75	2,74	78,90	9.925	55	—	13	41,8	C
HEM 120	140	126	12,5	21,0	12	74	738	66,4	175,0	2.018	288	5,51	703	112	3,25	109,00	24.790	65	—	17	52,1	C
HEM 140	160	146	13,0	22,0	12	92	835	80,6	247,0	3.291	411	6,39	1.144	157	3,77	145,00	54.330	73	—	21	63,2	C
HEM 160	180	166	14,0	23,0	15	104	970	97,1	337,0	5.098	566	7,25	1.759	212	4,26	190,00	108.100	85	—	23	76,2	C
HEM 180	200	186	14,5	24,0	15	122	1.090	113,3	442,0	7.483	748	8,13	2.580	277	4,77	241,00	199.300	95	—	25	88,9	C
HEM 200	220	206	15,0	25,0	18	134	1.200	131,3	568,0	10.620	967	9,00	3.651	354	5,27	301,00	346.300	105	—	25	103,0	C
HEM 220	240	226	15,5	26,0	18	152	1.320	149,4	710,0	14.605	1.220	9,89	5.012	444	5,79	372,00	572.700	115	—	25	117,0	C
HEM 240	270	248	18,0	32,0	21	164	1.460	199,6	1.060,0	24.289	1.800	11,00	8.153	657	6,39	751,00	1.152.000	90	35	25	157,0	C
HEM 260	290	268	18,0	32,5	24	177	1.570	219,6	1.260,0	31.307	2.160	11,90	10.449	780	6,90	848,00	1.728.000	100	40	25	172,0	C
HEM 280	310	288	18,5	33,0	24	196	1.690	240,2	1.480,0	39.547	2.550	12,80	13.163	914	7,40	957,00	2.520.000	110	45	25	189,0	C
HEM 300	320	305	16,0	29,0	27	208	1.780	225,1	1.460,0	40.951	2.560	13,50	13.736	901	7,81	686,00	2.903.000	120	50	25	177,0	C
HEM 300	340	310	21,0	39,0	27	208	1.830	303,1	2.040,0	59.201	3.480	14,00	19.403	1.252	8,00	1.690,00	4.386.000	120	50	25	238,0	C
HEM 320	359	309	21,0	40,0	27	225	1.870	312,0	2.220,0	68.135	3.800	14,80	19.709	1.280	7,95	1.810,00	5.004.000	120	50	25	245,0	C
HEM 340	377	309	21,0	40,0	27	243	1.900	315,8	2.360,0	76.372	4.050	15,60	19.711	1.280	7,90	1.820,00	5.585.000	120	50	25	248,0	C
HEM 360	395	308	21,0	40,0	27	261	1.930	318,8	2.490,0	84.867	4.300	16,30	19.522	1.270	7,83	1.820,00	6.137.000	120	50	25	250,0	C
HEM 400	432	307	21,0	40,0	27	298	2.000	325,8	2.790,0	104.119	4.820	17,90	19.335	1.260	7,70	1.830,00	7.410.000	120	50	25	256,0	C
HEM 450	478	307	21,0	40,0	27	344	2.100	335,4	3.170,0	131.484	5.500	19,80	19.339	1.260	7,59	1.850,00	9.252.000	120	50	25	263,0	C
HEM 500	524	306	21,0	40,0	27	390	2.180	344,3	3.550,0	161.929	6.180	21,70	19.155	1.250	7,46	1.860,00	11.187.000	120	50	28	270,0	C
HEM 550	572	306	21,0	40,0	27	438	2.280	354,4	3.970,0	197.984	6.920	23,60	19.158	1.250	7,35	1.880,00	13.516.000	120	50	28	278,0	C
HEM 600	620	305	21,0	40,0	27	486	2.370	363,7	4.390,0	237.447	7.660	25,60	18.975	1.240	7,22	1.890,00	15.908.000	120	50	28	285,0	C

Tabla 27: Dimensiones y términos de sección de los perfiles HE (HEB, HEA y HEM).

Perfil UPN

Su sección tiene forma de U. Las caras exteriores de las alas son perpendiculares al alma y las interiores presentan una inclinación del 8 por 100 respecto a las exteriores, por lo que las alas tienen espesor decreciente hacia los bordes. Las uniones entre la cara interior del alma y las caras interiores de las alas son redondeadas. Las alas tienen el borde con arista exterior viva e interior redondeada.

Las dimensiones y los términos de sección de los perfiles UPN se detallan en la *Tabla 28*, que coincide con la norma UNE 36 522.



A = Área de la sección	I_t = Módulo de torsión de la sección
S_x = Momento estático de media sección, respecto a X	c = Posición del eje Y
I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X	m = Distancia al centro de esfuerzos cortantes
$W_x = 2I_x : h$. Módulo resistente de la sección, respecto a X	a = Diámetro del agujero del roblón normal
$i_x = \sqrt{I_x : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a X	w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros
I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y	h_1 = Altura de la parte plana del alma
$W_y = I_y : (b - c)$. Mínimo módulo resistente de la sección, respecto a Y	p = Peso por m
$i_y = \sqrt{I_y : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y	u = Perímetro

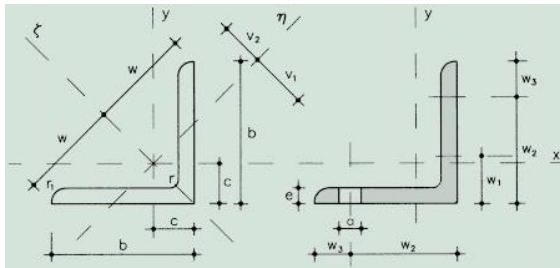
Perfil	Dimensiones								Términos de sección												Agujeros		Peso
	h	b	e	e ₁ =r	r ₁	h ₁	u	A	S _x	I _x	W _x	i _x	I _y	W _y	i _y	I _t	c	m	w	a	p		
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ³	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm	mm	mm	kp/m		
UPN 80	80	45	6,0	8,0	4,0	46	312	11,0	15,9	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	2,24	1,45	2,67	25	13	8,64	C	
UPN 100	100	50	6,0	8,5	4,5	64	372	13,5	24,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	2,96	1,55	2,93	30	13	10,60	P	
UPN 120	120	55	7,0	9,0	4,5	82	434	17,0	36,3	364	60,7	4,62	43,2	11,10	1,59	4,30	1,60	3,03	30	17	13,40	P	
UPN 140	140	60	7,0	10,0	5,0	98	489	20,4	51,4	605	86,4	5,45	62,7	14,80	1,75	6,02	1,75	3,37	35	17	16,00	P	
UPN 160	160	65	7,5	10,5	5,5	115	546	24,0	68,8	925	116,0	6,21	85,3	18,30	1,89	7,81	1,84	3,56	35	21	18,80	P	
UPN 180	180	70	8,0	11,0	5,5	133	611	28,0	89,6	1350	150,0	6,95	114,0	22,40	2,02	9,98	1,92	3,75	40	21	22,00	P	
UPN 200	200	75	8,5	11,5	6,0	151	661	32,2	114,0	1910	191,0	7,70	148,0	27,00	2,14	12,60	2,01	3,94	40	23	25,30	P	
UPN 220	220	80	9,0	12,5	6,5	167	718	37,4	146,0	2690	245,0	8,48	197,0	33,60	2,30	17,00	2,14	4,20	45	23	29,40	P	
UPN 240	240	85	9,5	13,0	6,5	184	775	42,3	179,0	3600	300,0	9,22	248,0	39,60	2,42	20,80	2,23	4,39	45	25	33,20	P	
UPN 260	260	90	10,0	14,0	7,0	200	834	48,3	221,0	4820	371,0	9,99	317,0	47,70	2,56	23,70	2,36	4,66	50	25	37,90	P	
UPN 280	280	95	10,0	15,0	7,5	216	890	53,3	266,0	6280	448,0	10,90	399,0	57,20	2,74	33,20	2,53	5,02	50	25	41,80	P	
UPN 300	300	100	10,0	16,0	8,0	232	950	58,8	316,0	8030	535,0	11,70	495,0	67,80	2,90	40,60	2,70	5,41	55	25	46,20	P	

Tabla 28: Dimensiones y términos de sección de los perfiles UPN.

Perfil L

Su sección tiene forma de ángulo recto, con las alas de igual longitud. Las caras de cada ala son paralelas y la unión de las caras interiores está redondeada. Las alas tienen el borde exterior con aristas vivas y el interior redondeado.

Las dimensiones y los términos de sección de los perfiles L se detallan en la *Tabla 29* y coinciden con los de la norma UNE 36 531.



A = Área de la sección

u = Perímetro

I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X

p = Peso por m

I_z = Momento de inercia de la sección, respecto a z

a = Diámetro del agujero del roblón normal

I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a y

$W_x = I_x / (b - c)$. Módulo resistente de la sección, respecto a X

$W_y = I_y / V_1$. Módulo resistente de la sección, respecto a y

$i_x = \sqrt{I_x / A}$. Radio de giro de la sección, respecto a X

$i_z = \sqrt{I_z / A}$. Radio de giro de la sección, respecto a z

$i_y = \sqrt{I_y / A}$. Radio de giro de la sección, respecto a y

Perfil	Dimensiones					Posición del centro				Términos de sección									Agujeros				Peso	
	b	e	r	r ₁	u	c	v ₁	v ₂	w	A	I _x	I _z	I _y	W _x	W _y	i _x	i _z	i _y	w ₁	w ₂	w ₃	a	p	
	mm	mm	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm²	cm⁴	cm⁴	cm⁴	cm³	cm³	cm	cm	cm	mm	mm	mm	mm	kp/m	
L 40. 4	40	4	6	3,0	155	1,12	1,58	1,40	2,83	3,08	4,47	7,09	1,86	1,55	1,17	1,21	1,52	0,78	22	—	18	11	2,42	P
L 40. 5	40	5	6	3,0	155	1,16	1,64	1,42	2,83	3,79	5,43	8,60	2,26	1,91	1,37	1,20	1,51	0,77	22	—	18	11	2,97	C
L 40. 6	40	6	6	3,0	155	1,20	1,70	1,43	2,83	4,48	6,31	9,98	2,65	2,26	1,56	1,19	1,49	0,77	22	—	18	11	3,52	C
L 45. 4	45	4	7	3,5	174	1,23	1,75	1,57	3,18	3,49	6,43	10,20	2,67	1,97	1,53	1,36	1,71	0,88	25	—	20	13	2,74	P
L 45. 5	45	5	7	3,5	174	1,28	1,81	1,58	3,16	4,30	7,84	12,40	3,26	2,43	1,80	1,35	1,70	0,87	25	—	20	13	3,38	P
L 45. 6	45	6	7	3,5	174	1,32	1,87	1,59	3,18	5,09	9,16	14,50	3,82	2,88	2,05	1,34	1,69	0,87	25	—	20	13	4,00	C
L 50. 4	50	4	7	3,5	194	1,36	1,92	1,75	3,54	3,89	8,97	14,20	3,72	2,46	1,94	1,52	1,91	0,98	30	—	20	13	3,06	P
L 50. 5	50	5	7	3,5	194	1,40	1,99	1,76	3,54	4,80	11,00	17,40	4,54	3,05	2,29	1,51	1,90	0,97	30	—	20	13	3,77	P
L 50. 6	50	6	7	3,5	194	1,45	2,04	1,77	3,54	5,69	12,80	20,30	5,33	3,61	2,61	1,50	1,89	0,97	30	—	20	13	4,47	C
L 50. 7	50	7	7	3,5	194	1,49	2,10	1,78	3,54	6,56	14,60	23,10	6,11	4,16	2,91	1,49	1,88	0,96	30	—	20	13	5,15	C
L 50. 8	50	8	7	3,5	194	1,52	2,16	1,80	3,54	7,41	16,30	25,70	6,87	4,68	3,19	1,48	1,86	0,96	30	—	20	13	5,82	C
L 60. 5	60	5	8	4,0	233	1,64	2,32	2,11	4,24	5,82	19,40	30,70	8,02	4,45	3,45	1,82	2,30	1,17	35	—	25	17	4,57	P
L 60. 6	60	6	8	4,0	233	1,69	2,39	2,11	4,24	6,91	22,80	36,20	9,43	5,29	3,95	1,82	2,29	1,17	35	—	25	17	5,42	P
L 60. 8	60	8	8	4,0	233	1,77	2,50	2,14	4,24	9,03	29,20	46,20	12,20	6,89	4,66	1,80	2,26	1,16	35	—	25	17	7,09	C
L 60. 10	60	10	8	4,0	233	1,85	2,61	2,17	4,24	11,10	34,90	55,10	14,80	8,41	5,67	1,78	2,23	1,16	35	—	25	17	8,69	C
L 70. 6	70	6	9	4,5	272	1,93	2,73	2,46	4,95	8,13	36,9	58,5	15,3	7,27	5,59	2,13	2,68	1,37	40	—	30	21	6,38	P
L 70. 7	70	7	9	4,5	272	1,97	2,79	2,47	4,95	9,40	42,3	67,1	17,5	8,41	6,27	2,12	2,67	1,36	40	—	30	21	7,38	P
L 70. 8	70	8	9	4,5	272	2,01	2,85	2,47	4,95	10,60	47,5	75,3	19,7	9,52	6,91	2,11	2,66	1,36	40	—	30	21	8,36	C
L 70. 10	70	10	9	4,5	272	2,09	2,96	2,50	4,95	13,10	57,2	90,5	23,9	11,70	8,10	2,09	2,63	1,35	40	—	30	21	10,30	C
L 80. 8	80	8	10	5,0	311	2,26	3,19	2,82	5,66	12,30	72,2	115,0	29,9	12,60	9,36	2,43	3,06	1,56	45	—	35	23	9,63	P
L 80. 10	80	10	10	5,0	311	2,34	3,30	2,85	5,66	15,10	87,5	139,0	36,3	13,40	11,00	2,41	3,03	1,55	45	—	35	23	11,90	C
L 80. 12	80	12	10	5,0	311	2,41	3,41	2,89	5,66	17,90	102,0	161,0	42,7	18,20	12,50	2,39	3,00	1,55	45	—	35	23	14,00	C
L 90. 8	90	8	11	5,5	351	2,50	3,53	3,17	6,36	13,90	104,0	166,0	43,1	16,10	12,20	2,74	3,45	1,76	50	—	40	25	10,90	P
L 90. 10	90	10	11	5,5	351	2,58	3,65	3,19	6,36	17,10	127,0	201,0	52,5	19,80	14,40	2,72	3,43	1,75	50	—	40	25	13,40	C
L 90. 12	90	12	11	5,5	351	2,66	3,76	3,22	6,36	20,30	148,0	234,0	61,7	23,30	16,40	2,70	3,40	1,74	50	—	40	25	15,90	C

(continúa)

(continuación)

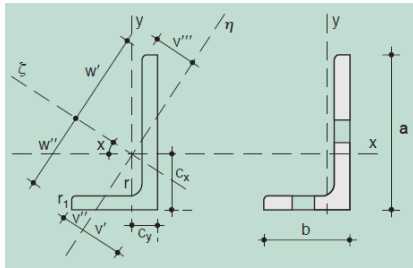
Perfil	Dimensiones					Posición del centro				Términos de sección									Agujeros				Peso	
	b	e	r	r ₁	u	c	v ₁	v ₂	w	A	I _x	I _y	I _{xy}	W _x	W _y	i _x	i _y	i _{xy}	w ₁	w ₂	w ₃	a	p	
	mm	mm	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm	cm	mm	mm	mm	mm	kp/m	
L 100. 8	100	8	12	6,0	390	2,74	3,87	3,52	7,07	15,50	145,0	230,0	59,8	19,90	15,50	3,06	3,85	1,96	45	60	40	25	12,20	P
L 100. 10	100	10	12	6,0	390	2,82	3,99	3,54	7,07	19,20	177,0	280,0	72,9	24,60	18,30	3,04	3,83	1,95	45	60	40	25	15,00	P
L 100. 12	100	12	12	6,0	390	2,90	4,11	3,57	7,07	22,70	207,0	328,0	85,7	29,10	20,90	3,02	3,80	1,94	45	60	40	25	17,80	C
L 100. 15	100	15	12	6,0	390	3,02	4,27	3,61	7,07	27,90	249,0	393,0	104,0	35,60	24,40	2,98	3,75	1,93	45	60	40	25	21,90	C
L 120. 10	120	10	13	6,5	469	3,31	4,69	4,23	8,49	23,20	313,0	497,0	129,0	36,00	27,50	3,67	4,63	2,36	50	80	40	25	18,20	P
L 120. 12	120	12	13	6,5	469	3,40	4,80	4,28	8,49	27,50	368,0	584,0	152,0	42,70	31,50	3,65	4,60	2,35	50	80	40	25	21,60	P
L 120. 15	120	15	13	6,5	469	3,51	4,97	4,31	8,49	33,90	445,0	705,0	185,0	52,40	37,10	3,62	4,56	2,33	50	80	40	25	26,60	C
L 150. 12	150	12	16	8,0	586	4,12	5,83	5,29	10,60	34,80	737,0	1.170,0	303,0	67,70	52,00	4,60	5,80	2,95	50	105	45	28	27,30	P
L 150. 15	150	15	16	8,0	586	4,25	6,01	5,33	10,60	43,00	898,0	1.430,0	370,0	83,50	61,60	4,57	5,76	2,93	50	105	45	28	33,80	P
L 150. 18	150	18	16	8,0	586	4,37	6,17	5,38	10,60	51,00	1.050,0	1.670,0	435,0	98,70	70,40	4,54	5,71	2,92	50	105	45	28	40,10	C
L 180. 15	180	15	18	9,0	705	4,98	7,05	6,36	12,70	52,10	1.590,0	2.520,0	653,0	122,0	92,60	5,52	6,96	3,54	60	135	45	28	40,90	C
L 180. 18	180	18	18	9,0	705	5,10	7,22	6,41	12,70	61,90	1.870,0	2.960,0	768,0	145,0	106,00	5,49	6,92	3,52	60	135	45	28	48,60	C
L 180. 20	180	20	18	9,0	705	5,18	7,33	6,44	12,70	68,30	2.040,0	3.240,0	843,0	159,0	115,00	5,47	6,89	3,51	60	135	45	28	53,70	C
L 200. 16	200	16	18	9,0	785	5,52	7,81	7,09	14,10	61,80	2.340,0	3.720,0	960,0	162,0	123,00	6,16	7,76	3,94	60	150	50	28	48,50	C
L 200. 18	200	18	18	9,0	785	5,60	7,93	7,12	14,10	69,10	2.600,0	4.130,0	1.070,0	181,0	135,00	6,13	7,73	3,93	60	150	50	28	54,20	C
L 200. 20	200	20	18	9,0	785	5,68	8,04	7,15	14,10	76,30	2.850,0	4.530,0	1.170,0	199,0	146,00	6,11	7,70	3,92	60	150	50	28	59,90	C
L 200. 24	200	24	18	9,0	785	5,84	8,26	7,21	14,10	90,60	3.330,0	5.280,0	1.380,0	235,0	167,00	6,06	7,64	3,90	60	150	50	28	71,10	C

Tabla 29: Dimensiones y términos de sección de los perfiles L.

Perfil LD

Su sección tiene forma de ángulo recto, con alas de distinta longitud. Las caras de cada ala son paralelas y la unión de las caras interiores es redondeada. Las alas tienen el borde exterior con aristas vivas y el interior redondeado.

Las dimensiones y los términos de sección de los perfiles LD se detallan en la *Tabla 30* y coinciden con los de la norma UNE 36 532.



A = Área de la sección	$i_y = \sqrt{I_y/A}$: Radio de giro de la sección, respecto a Y
I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X	$i_z = \sqrt{I_z/A}$: Radio de giro de la sección, respecto a Z
I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y	$i_\eta = \sqrt{I_\eta/A}$: Radio de giro de la sección, respecto a η
I_z = Momento de inercia de la sección, respecto a Z	
I_η = Momento de inercia de la sección, respecto a η	
$W_x = I_x / (a - c_x)$: Módulo resistente de la sección, respecto a X	u = Perímetro
$W_y = I_y / (b - c_y)$: Módulo resistente de la sección, respecto a Y	p = Peso por m
$W_\eta = I_\eta / V'$: Módulo resistente de la sección, respecto a η	
$i_x = \sqrt{I_x/A}$: Radio de giro de la sección, respecto a X	

Perfil	Dimensiones						Posición del centro								Términos de sección										Peso	
	a	b	e	r	r ₁	u	c _x	c _y	w'	w''	V'	V''	V'''	A	I _x	I _y	I _z	I _η	W _x	W _y	i _x	i _y	i _z	i _η	p	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm	cm	cm	kg/m	
L 40. 25. 4	40	25	4	4	2,0	127	1,3	0,6	2,6	1,9	1,0	1,3	0,6	2,46	3,89	1,16	4,35	0,70	1,47	0,62	1,26	0,69	1,33	0,53	11,93	C
L 40. 25. 5	40	25	5	4	2,0	127	1,4	0,6	2,6	1,9	1,1	1,3	0,7	3,02	4,69	1,39	5,23	0,85	1,81	0,76	1,25	0,68	1,32	0,53	2,37	C
L 45. 30. 4	45	30	4	4	2,0	147	1,4	0,7	3,0	2,3	1,2	1,5	0,8	2,86	5,77	2,05	6,63	1,19	1,91	0,91	1,42	0,85	1,52	0,65	2,24	C
L 45. 30. 4	45	30	5	4	2,0	147	1,5	0,7	3,0	2,3	1,3	1,5	0,8	3,52	6,98	2,47	8,00	1,45	2,35	1,11	1,41	0,84	1,51	0,64	2,76	C
L 60. 30. 5	60	30	5	6	3,0	175	2,1	0,6	3,8	2,7	1,2	1,7	0,7	4,29	15,60	2,60	16,50	1,70	4,04	1,12	1,90	0,78	1,96	0,63	3,37	C
L 60. 30. 6	60	30	6	6	3,0	175	2,2	0,7	3,8	2,7	1,2	1,7	0,7	5,08	18,20	3,02	19,20	1,99	4,78	1,32	1,89	0,77	1,95	0,63	3,99	C
L 60. 40. 5	60	40	5	6	3,0	195	1,9	0,9	4,1	3,0	1,6	2,1	1,1	4,79	17,20	6,11	19,80	3,54	4,25	2,02	1,89	1,13	2,03	0,86	3,76	C
L 60. 40. 6	60	40	6	6	3,0	195	2,0	1,0	4,0	3,0	1,7	2,1	1,1	5,68	20,10	7,12	23,10	4,15	5,03	2,38	1,88	1,12	2,02	0,86	4,46	C
L 60. 40. 7	60	40	7	6	3,0	195	2,0	1,0	4,0	3,0	1,7	2,0	1,1	6,55	22,90	8,07	26,30	4,75	5,79	2,74	1,87	1,11	2,00	0,85	5,14	C
L 65. 50. 5	65	50	5	6	3,0	225	1,9	1,2	4,5	3,6	2,0	2,3	1,5	5,54	23,20	11,90	28,80	6,32	5,14	3,19	2,05	1,47	2,28	1,07	4,35	C
L 65. 50. 6	65	50	6	6	3,0	225	2,0	1,2	4,5	3,6	2,1	2,3	1,5	6,58	27,20	14,00	33,80	7,43	6,10	3,77	2,03	1,46	2,27	1,06	5,16	C
L 65. 50. 7	65	50	7	6	3,0	225	2,0	1,3	4,5	3,6	2,1	2,3	1,5	7,60	31,10	15,90	38,50	8,51	7,03	4,34	2,02	1,45	2,25	1,06	5,96	C
L 65. 50. 8	65	50	8	6	3,0	225	2,1	1,3	4,4	3,7	2,2	2,3	1,5	8,60	34,80	17,70	43,00	9,56	7,93	4,89	2,01	1,44	2,24	1,05	6,75	C
L 75. 50. 5	75	50	5	7	3,5	244	2,3	1,1	5,1	3,8	2,0	2,6	1,3	6,05	34,40	12,30	39,60	7,11	6,74	3,21	2,38	1,43	2,56	1,08	4,75	C
L 75. 50. 6	75	50	6	7	3,5	244	2,4	1,2	5,1	3,8	2,0	2,6	1,3	7,19	40,50	14,40	46,60	8,36	8,01	3,81	2,37	1,42	2,55	1,08	5,65	C
L 75. 50. 7	75	50	7	7	3,5	244	2,4	1,2	5,1	3,8	2,1	2,6	1,3	8,31	46,40	16,50	53,30	9,57	9,24	4,39	2,36	1,41	2,53	1,07	6,53	C
L 75. 50. 8	75	50	8	7	3,5	244	2,5	1,2	5,0	3,8	2,1	2,6	1,4	9,41	52,00	18,40	59,70	10,80	10,40	4,95	2,35	1,40	2,52	1,07	7,39	C
L 80. 40. 5	80	40	5	7	3,5	234	2,8	0,8	5,2	3,5	1,5	2,4	0,9	5,80	38,20	6,49	40,50	4,19	7,35	2,06	2,56	1,06	2,64	0,85	4,56	C
L 80. 40. 6	80	40	6	7	3,5	234	2,8	0,8	5,2	3,5	1,5	2,3	0,8	6,89	44,90	7,59	47,60	4,92	8,73	2,44	2,55	1,08	2,63	0,85	5,41	C
L 80. 40. 7	80	40	7	7	3,5	234	2,9	0,9	5,1	3,6	1,6	2,3	0,9	7,96	51,40	8,63	54,40	5,64	10,10	2,81	2,54	1,04	2,61	0,84	6,25	C
L 80. 40. 8	80	40	8	7	3,5	234	2,9	0,9	5,1	3,6	1,6	2,3	1,0	9,01	57,60	9,61	60,90	6,33	11,40	3,16	2,53	1,03	2,60	0,84	7,07	C
L 80. 60. 6	80	60	6	8	4,0	273	2,4	1,4	5,5	3,8	2,5	2,9	1,7	8,11	51,40	24,80	62,80	13,40	9,29	5,49	2,52	1,75	2,78	1,29	6,37	C
L 80. 60. 7	80	60	7	8	4,0	273	2,5	1,5	5,5	3,8	2,5	2,9	1,7	9,38	59,00	28,40	72,00	15,40	10,70	6,34	2,51	1,74	2,77	1,28	7,36	C
L 80. 60. 8	80	60	8	8	4,0	273	2,5	1,5	5,5	3,8	2,5	2,9	1,8	10,60	66,30	31,80	80,80	17,30	12,20	7,16	2,50	1,73	2,76	1,27	8,34	C

(continúa)

(continuación)

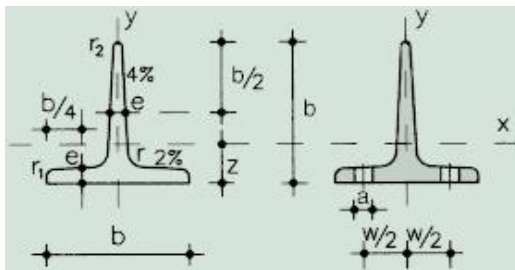
Perfil	Dimensiones						Posición del centro							Términos de sección												Peso	
	a	b	e	r	r ₁	u	c _x	c _y	w'	w''	V'	V''	V'''	A	I _x	I _y	I _{xy}	I _{xx}	I _{yy}	W _x	W _y	i _x	i _y	i _x	i _y	p	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm	cm	cm	kp/m	
L 100. 50. 6	100	50	6	9	4,5	292	3,4	1,0	6,5	4,4	1,9	3,0	1,1	8,73	89,70	15,30	95,10	9,85	13,80	3,85	3,21	1,32	3,30	1,06	6,85	C	
L 100. 50. 7	100	50	7	9	4,5	292	3,5	1,0	6,5	4,4	1,9	2,9	1,1	10,10	103,00	17,40	109,00	11,30	16,00	4,46	3,20	1,31	3,29	1,06	7,93	C	
L 100. 50. 8	100	50	8	9	4,5	292	3,5	1,1	6,4	4,4	2,0	2,9	1,1	11,40	116,00	19,50	123,00	12,70	18,10	5,04	3,18	1,31	3,28	1,05	8,99	C	
L 100. 50.10	100	50	10	9	4,5	292	3,6	1,2	6,4	4,5	2,0	2,9	1,2	14,10	141,00	23,40	149,00	15,40	22,20	6,17	3,16	1,29	3,25	1,05	11,10	C	
L 100. 65. 7	100	65	7	10	5,0	321	3,2	1,5	6,8	4,9	2,6	3,4	1,7	11,20	113,00	57,60	128,00	22,00	16,60	7,53	3,17	1,83	3,39	1,40	8,77	C	
L 100. 65. 8	100	65	8	10	5,0	321	3,2	1,5	6,8	4,9	2,6	3,4	1,7	12,70	127,00	42,20	144,00	24,80	18,90	8,54	3,16	1,83	3,37	1,40	9,94	C	
L 100. 65.10	100	65	10	10	5,0	321	3,3	1,6	6,7	5,0	2,7	3,4	1,7	15,60	154,00	51,00	175,00	30,10	23,20	10,50	3,14	1,81	3,35	1,39	12,30	C	
L 100. 75. 8	100	75	8	10	5,0	341	3,1	1,8	6,9	5,4	3,1	3,6	2,1	13,50	133,00	64,10	163,00	34,60	19,30	11,40	3,14	2,18	3,47	1,60	10,60	P	
L 100. 75.10	100	75	10	10	5,0	341	3,1	1,9	6,9	5,4	3,2	3,6	2,2	16,60	162,00	77,60	197,00	42,20	23,80	14,00	3,12	2,16	3,45	1,59	13,00	P	
L 100. 75.12	100	75	12	10	5,0	341	3,2	2,0	6,8	5,5	3,3	3,6	2,2	19,70	189,00	90,20	230,00	49,50	28,00	16,50	3,10	2,14	3,42	1,59	15,40	P	
L 120. 80. 8	120	80	8	11	5,5	391	3,8	1,8	8,2	6,0	3,2	4,2	2,1	15,50	226,00	80,80	260,00	46,60	27,60	13,20	3,82	2,28	4,10	1,73	12,20	P	
L 120. 80.10	120	80	10	11	5,5	391	3,9	1,9	8,1	6,0	3,3	4,2	2,1	19,10	276,00	98,10	317,00	56,80	34,10	16,20	3,80	2,26	4,07	1,72	15,00	P	
L 120. 80.12	120	80	12	11	5,5	391	4,0	2,0	8,1	6,0	3,4	4,2	2,2	22,70	323,00	114,00	371,00	66,60	40,40	19,10	3,77	2,24	4,04	1,71	17,80	P	
L 130. 65. 8	130	65	8	11	5,5	381	4,5	1,3	8,5	5,8	2,4	3,9	1,4	15,10	263,00	44,80	278,00	28,90	31,10	8,20	4,17	1,72	4,30	1,38	11,80	C	
L 130. 65.10	130	65	10	11	5,5	381	4,6	1,4	8,4	5,8	2,5	3,8	1,5	18,60	320,00	54,20	339,00	35,20	38,40	10,70	4,15	1,71	4,27	1,37	14,60	C	
L 130. 65.12	130	65	12	11	5,5	381	4,7	1,5	8,3	5,9	2,6	3,8	1,6	22,10	375,00	63,00	397,00	41,20	45,40	12,70	4,12	1,69	4,24	1,37	17,30	C	
L 150. 75. 9	150	75	9	11	5,5	441	5,2	1,5	9,8	6,6	2,9	4,5	1,7	19,60	456,00	78,30	484,00	50,40	46,90	13,20	4,83	2,00	4,97	1,60	15,4	C	
L 150. 75.10	150	75	10	11	5,5	441	5,3	1,6	9,7	6,6	2,9	4,4	1,7	21,60	501,00	85,80	532,00	55,30	51,80	14,6	4,81	1,99	4,96	1,60	17,0	C	
L 150. 75.12	150	75	12	11	5,5	441	5,4	1,6	9,7	6,6	2,9	4,4	1,8	25,70	589,00	99,90	624,00	64,90	61,40	17,2	4,79	1,97	4,93	1,59	20,2	C	
L 150. 75.15	150	75	15	11	5,5	441	5,5	1,8	9,6	6,9	3,1	4,4	1,9	31,60	713,00	120,00	754,00	78,80	75,30	21,0	4,75	1,94	4,88	1,58	24,8	C	
L 150. 90.10	150	90	10	12	6,0	470	5,0	2,0	10,1	7,1	3,6	5,0	2,2	23,20	533,00	146,00	591,00	88,20	53,30	21,0	4,80	2,51	5,05	1,95	18,2	C	
L 150. 90.12	150	90	12	12	6,0	470	5,0	2,1	10,1	7,1	3,7	5,0	2,3	27,50	627,00	171,00	695,00	104,00	63,30	24,8	4,77	2,49	5,02	1,94	21,6	C	
L 150. 90.15	150	90	15	12	6,0	470	5,2	2,2	9,9	7,2	3,8	4,9	2,4	33,90	761,00	205,00	841,00	126,00	77,70	30,4	4,74	2,46	4,98	1,93	26,6	C	
L 200.100.10	200	100	10	15	7,5	587	6,9	2,0	13,2	8,1	3,7	6,0	2,2	29,20	1.220,00	210,00	1.290,00	135,00	93,20	26,3	6,46	2,68	6,65	2,15	23,0	C	
L 200.100.12	200	100	12	15	7,5	587	7,0	2,1	13,1	8,1	3,8	6,0	2,2	34,80	1.440,00	247,00	1.530,00	159,00	111,00	31,3	6,43	2,67	6,63	2,14	27,3	C	
L 200.100.15	200	100	15	15	7,5	587	7,1	2,2	13,0	8,2	3,9	5,9	2,3	43,00	1.760,00	299,00	1.860,00	194,00	137,00	38,4	6,40	2,64	6,58	2,12	33,7	C	
L 200.150.10	200	150	10	15	7,5	687	5,9	3,5	14,0	10,8	5,9	7,3	4,5	34,20	1.400,00	680,00	1.710,00	364,00	99,60	59,2	6,38	4,46	7,07	3,26	26,9	C	
L 200.150.12	200	150	12	15	7,5	687	6,0	3,6	13,9	10,8	6,0	7,3	4,1	40,80	1.650,00	803,00	2.030,00	430,00	119,00	70,5	6,36	4,44	7,05	3,25	32,0	C	
L 200.150.15	200	150	15	15	7,5	687	6,2	3,7	13,9	10,8	6,2	7,3	3,9	50,50	2.020,00	979,00	2.480,00	526,00	147,00	86,9	6,33	4,40	7,00	3,23	39,6	C	
L 200.150.18	200	150	18	15	7,5	687	6,3	3,8	13,8	10,9	6,4	7,3	3,6	60,00	2.380,00	1.150,00	2.900,00	618,00	174,00	103,0	6,29	4,37	6,96	3,21	47,1	C	

Tabla 30: Dimensiones y términos de sección de los perfiles LD.

Perfil T

Su sección tiene forma de T. El extremo del alma es redondeado, así como las uniones de esta con las caras interiores de las alas y las aristas interiores de éstas. Las caras interiores de las alas están inclinadas un 2 por 100 respecto a las exteriores y las del alma un 2 por 100 respecto a su eje.

Las dimensiones y los términos de sección de los perfiles T se detallan en la *Tabla 31* y coinciden con los de la norma UNE 36 533.



A = Área de la sección
 I_x = Momento de inercia de media sección, respecto al eje X
 $W_x = I_x : (b - z)$. Módulo resistente de la sección, respecto al eje X
 $i_x = \sqrt{I_x / A}$. Radio de giro de la sección, respecto a X
 I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y
 $W_y = 2I_y : b$ Módulo resistente de la sección, respecto a Y.
 $i_y = \sqrt{I_y / A}$. Radio de giro, de la secc., respecto a Y
 u = Perímetro de la sección
 p = Peso por m
 I_t = Módulo de torsión de la sección

Perfil	Dimensiones						Posición del centro	Términos de sección								Agujeros		Peso
	b mm	e=r mm	r ₁ mm	r ₂ mm	u mm	z cm		A cm	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	w mm	a mm	p kp/m
T 40 5	40	5	2,5	1,0	153	1,12	3,77	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83	0,350	21	6,4	2,96	C
T 50 6	50	6	3,0	1,5	191	1,39	5,66	12,10	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03	0,757	30	6,4	4,44	C
T 60 7	60	7	3,5	2,0	229	1,66	7,94	23,80	5,48	1,73	12,20	4,07	1,24	1,450	34	8,4	6,23	C
T 70 8	70	8	4,0	2,0	268	1,94	10,60	44,50	8,79	2,05	22,10	6,32	1,44	2,520	38	11,0	8,32	C
T 80 9	80	9	4,5	2,0	307	2,22	13,60	73,70	12,80	2,33	37,00	9,25	1,65	4,110	45	11,0	10,70	C
T 100 11	100	11	5,5	3,0	383	2,74	20,90	179,00	24,60	2,92	88,30	17,70	2,05	9,380	60	13,0	16,40	C

Tabla 31: Dimensiones y términos de sección de los perfiles T.

[A3] Obtención de la solución a la ecuación homogénea

Procedimiento para la obtención de a solución de la ecuación homogénea:

$$\theta^{IV} - \frac{k^2}{l^2} \cdot \theta^{II} = 0 \quad (a)$$

Buscamos una solución para esta ecuación en la forma:

$$\theta = e^{r\delta} \quad (b)$$

Donde r es un factor desconocido a ser determinado. Sustituimos b en la ecuación a, obteniendo:

$$r^4 \cdot e^{r\delta} - \frac{k^2}{l^2} \cdot r^2 \cdot e^{r\delta} = 0$$

Como $e^{r\delta}$ es un factor común, lo podemos eliminar, y obtenemos la ecuación característica para determinar el valor de r:

$$r^2 \cdot \left(r^2 - \frac{k^2}{l^2} \right) = 0 \quad (c)$$

Resolviendo la ecuación c, encontramos:

$$\begin{aligned} r^2 - \frac{k^2}{l^2} = 0 & \rightarrow r_1 = -\frac{k}{l} \quad r_2 = \frac{k}{l} \\ r^2 = 0 & \rightarrow r_3 = r_4 = 0 \end{aligned}$$

Consecuentemente, la integral general de la ecuación homogénea a puede ser escrita como:

$$\theta = \overline{C}_1 e^{-\frac{k}{l}x} + \overline{C}_2 \cdot e^{\frac{k}{l}x} + C_3 \cdot x + C_4 \quad (d)$$

Pasando de funciones exponenciales a hiperbólicas a través de las fórmulas:

$$e^{\frac{k}{l}x} = \cosh \frac{k}{l}x + \sinh \frac{k}{l}x \quad y \quad e^{-\frac{k}{l}x} = \cosh \frac{k}{l}x - \sinh \frac{k}{l}x$$

Sustituimos en la ecuación d, obteniendo:

$$\begin{aligned} \theta &= \overline{C}_1 \cdot \left(\cosh \frac{k}{l}x + \sinh \frac{k}{l}x \right) + \overline{C}_2 \cdot \left(\cosh \frac{k}{l}x - \sinh \frac{k}{l}x \right) + C_3 \cdot x + C_4 \\ \theta &= \sinh \frac{k}{l}x \cdot (\overline{C}_2 - \overline{C}_1) + \cosh \frac{k}{l}x \cdot (\overline{C}_1 + \overline{C}_2) + C_3 \cdot x + C_4 \end{aligned}$$

Creando las nuevas constantes $C_1 = \overline{C}_2 - \overline{C}_1$ y $C_2 = \overline{C}_1 + \overline{C}_2$, obtenemos:

$$\theta = C_1 \cdot \sinh \frac{k}{l}x + C_2 \cdot \cosh \frac{k}{l}x + C_3 \cdot x + C_4$$

Sabiendo que $k = \lambda \cdot l$, obtenemos la expresión deseada:

$$\theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda x) + C_3 \cdot x + C_4 \quad (e)$$

[A4] Regla de Cramer

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

Cuya forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

La regla de Cramer consiste en que las incógnitas son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{e \cdot d - b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot f - e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$$

[A5] Linealización de la matriz de rigidez

A continuación, se mostrará un ejemplo de cómo se linealizaría la matriz explicando solo uno de sus componentes, en concreto el de la fila 1, columna 1 de la matriz de rigidez:

$$\frac{E \cdot I_w \cdot \lambda^3 \cdot \sinh(\lambda L)}{[\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot \cosh(\lambda L) + 2]} \quad (\text{i})$$

Para las funciones de $\sinh(\lambda L)$ y $\cosh(\lambda L)$ usaremos una aproximación polinómica mediante el teorema de Taylor, que dice así:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + h_k(x) \cdot (x - x_0)^k$$

Por tanto, siendo la primera función a aproximar $f(x) = \sinh(\lambda L)$ y $x_0 = 0$, obtenemos:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad (\text{ii})$$

A continuación, la función que aproximaremos será $f(x) = \cosh(\lambda L)$ con $x_0 = 0$ y obtenemos:

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad (\text{iii})$$

Sustituimos la ecuación ii y iii en la ecuación i y nos queda:

$$\begin{aligned} E \cdot I_w \cdot \frac{\lambda^3 \cdot \sinh(\lambda L)}{[\lambda L \cdot \sinh(\lambda L) - 2 \cdot \cosh(\lambda L) + 2]} &= E \cdot I_w \cdot \frac{L \cdot \lambda^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda L)^{2n}}{(2n+1)!}}{2 + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda L)^{2n} \cdot \left(-\frac{2}{(2n)!} + \frac{(\lambda L)^2}{(2n+1)!} \right)} \\ &= E \cdot I_w \cdot \frac{L \cdot \lambda^4 \cdot \left(1 + \frac{(\lambda L)^2}{6} + \frac{(\lambda L)^4}{120} \right)}{2 + \frac{(\lambda L)^6}{120} + \frac{(\lambda L)^4}{12} - 2} = E \cdot I_w \cdot \frac{L \cdot \lambda^4 \cdot \left(1 + \frac{(\lambda L)^2}{6} + \frac{(\lambda L)^4}{120} \right)}{(\lambda L)^4 \cdot \left(\frac{(\lambda L)^2}{120} + \frac{1}{12} \right)} \\ &= E \cdot I_w \cdot \frac{\left(1 + \frac{(\lambda L)^2}{6} + \frac{(\lambda L)^4}{120} \right)}{L^3 \cdot \left(\frac{(\lambda L)^2}{120} + \frac{1}{12} \right)} \end{aligned}$$

Calculamos el límite de la función cuando valor de λ tiende a 0, es decir, $\lambda \rightarrow 0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E \cdot I_w \cdot \frac{\left(1 + \frac{(\lambda L)^2}{6} + \frac{(\lambda L)^4}{120} \right)}{L^3 \cdot \left(\frac{(\lambda L)^2}{120} + \frac{1}{12} \right)} = E \cdot I_w \cdot \frac{12}{L^3}$$

De esta manera, solo obtenemos la primera parte de la matriz linealizada, es con un programa de cálculo matemático, donde, introduciendo nuestra función nos da la linealización:

Input interpretation:

series	$\frac{\lambda^3 \sinh(\lambda L)}{\lambda L \sinh(\lambda L) - 2 \cosh(\lambda L) + 2}$	point	$\lambda = 0$
		order	λ^2

Series expansion at $\lambda=0$:

$$\frac{12}{L^3} + \frac{6\lambda^2}{5L} + O(\lambda^3)$$

(Taylor series)

Introduciendo la linealización hasta el segundo orden se obtienen las matrices de rigidez a torsión linealizadas correspondientes al alabeo y a la uniforme de forma separada, Ecuación 33.b.

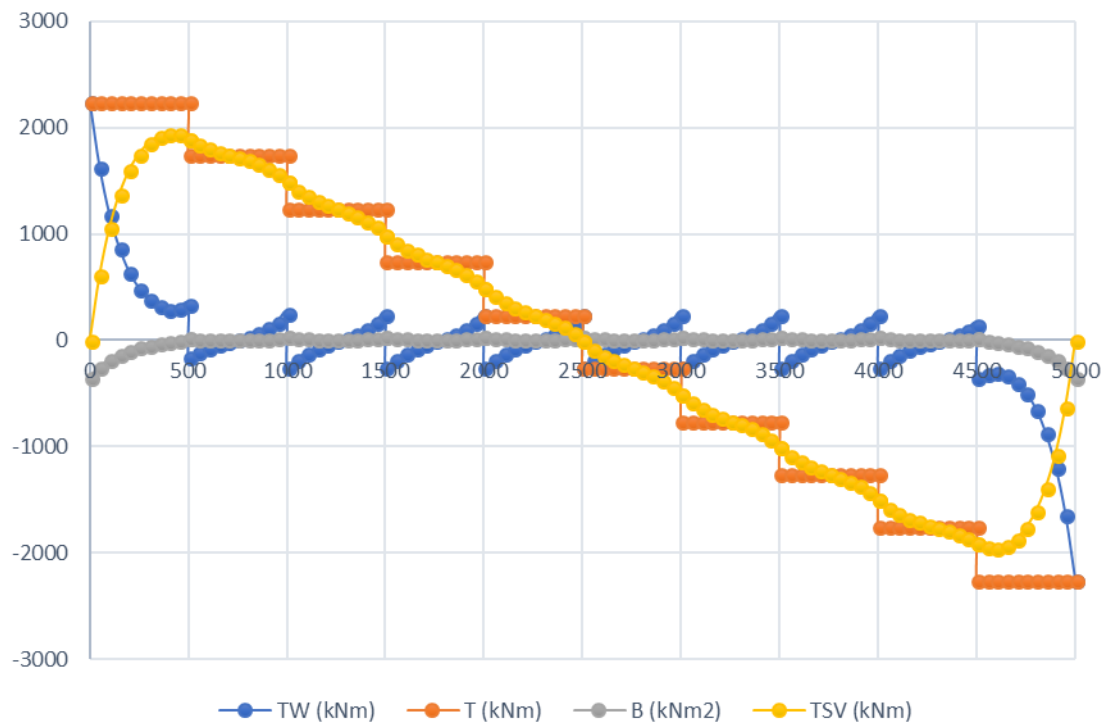
[A6] Resultados de los Casos Particulares

1) Caso Particular 1

Numero de elementos = 10

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	0,00	2250,00	2250,00	-342,02
500	1904,04	345,96	2250,00	26,69
500	1904,04	-154,04	1750,00	26,69
1000	1496,32	253,68	1750,00	40,84
1000	1496,32	-246,32	1250,00	40,84
1500	999,86	250,14	1250,00	41,38
1500	999,86	-249,86	750,00	41,38
2000	499,99	250,01	750,00	41,40
2000	499,99	-249,99	250,00	41,40
2500	0,00	250,00	250,00	41,40
2500	0,00	-250,00	-250,00	41,40
3000	-499,99	249,99	-250,00	41,40
3000	-499,99	-250,01	-750,00	41,40
3500	-999,86	249,86	-750,00	41,38
3500	-999,86	-250,14	-1250,00	41,38
4000	-1496,32	246,32	-1250,00	40,84
4000	-1496,32	-253,68	-1750,00	40,84
4500	-1904,04	154,04	-1750,00	26,69
4500	-1904,04	-345,96	-2250,00	26,69
5000	0,00	-2250,00	-2250,00	-342,02

Tabla 32: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 10 elementos.

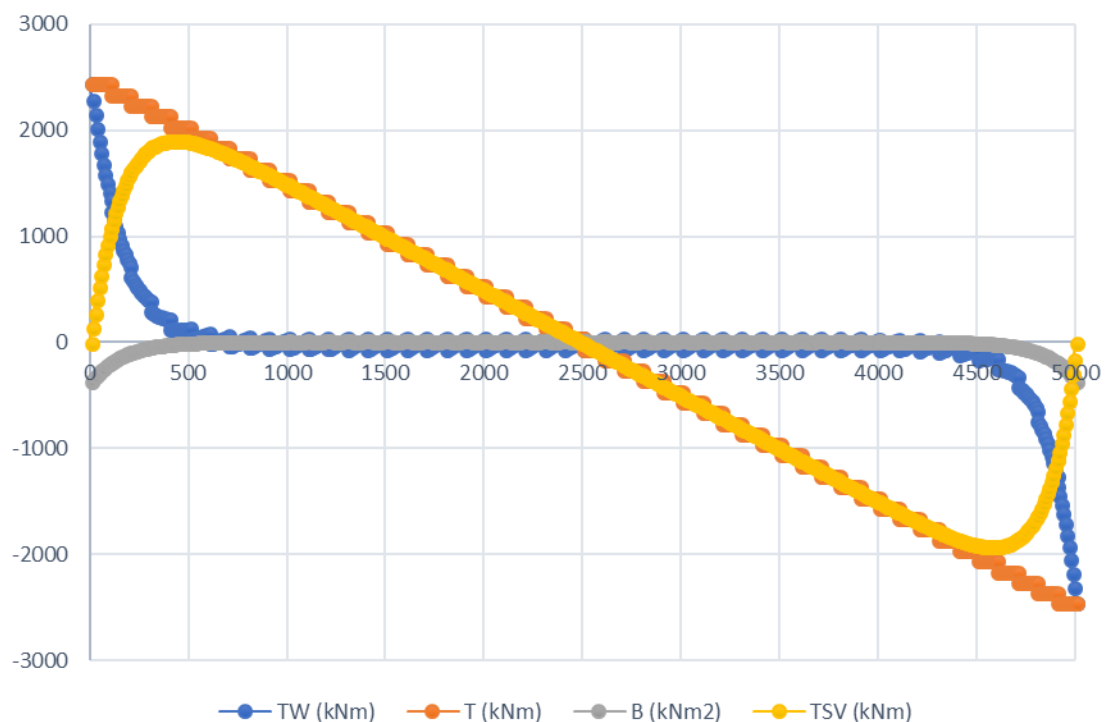


Gráfica 9: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 10 elementos.

Numero de elementos = 50

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	0,00	2450,00	2450,00	-359,07
500	1904,04	145,96	2050,00	9,63
500	1904,04	45,96	1950,00	9,63
1000	1496,32	53,68	1550,00	23,78
1000	1496,32	-46,32	1450,00	23,78
1500	999,86	50,14	1050,00	24,33
1500	999,86	-49,86	950,00	24,33
2000	499,99	50,01	550,00	24,35
2000	499,99	-49,99	450,00	24,35
2500	0,00	50,00	50,00	24,35
2500	0,00	-50,00	-50,00	24,35
3000	-499,99	49,99	-450,00	24,35
3000	-499,99	-50,01	-550,00	24,35
3500	-999,86	49,86	-950,00	24,33
3500	-999,86	-50,14	-1050,00	24,33
4000	-1496,32	46,32	-1450,00	23,78
4000	-1496,32	-53,68	-1550,00	23,78
4500	-1904,04	-45,96	-1950,00	9,63
4500	-1904,04	-145,96	-2050,00	9,63
5000	0,00	-2450,00	-2450,00	-359,07

Tabla 33: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 50 elementos.

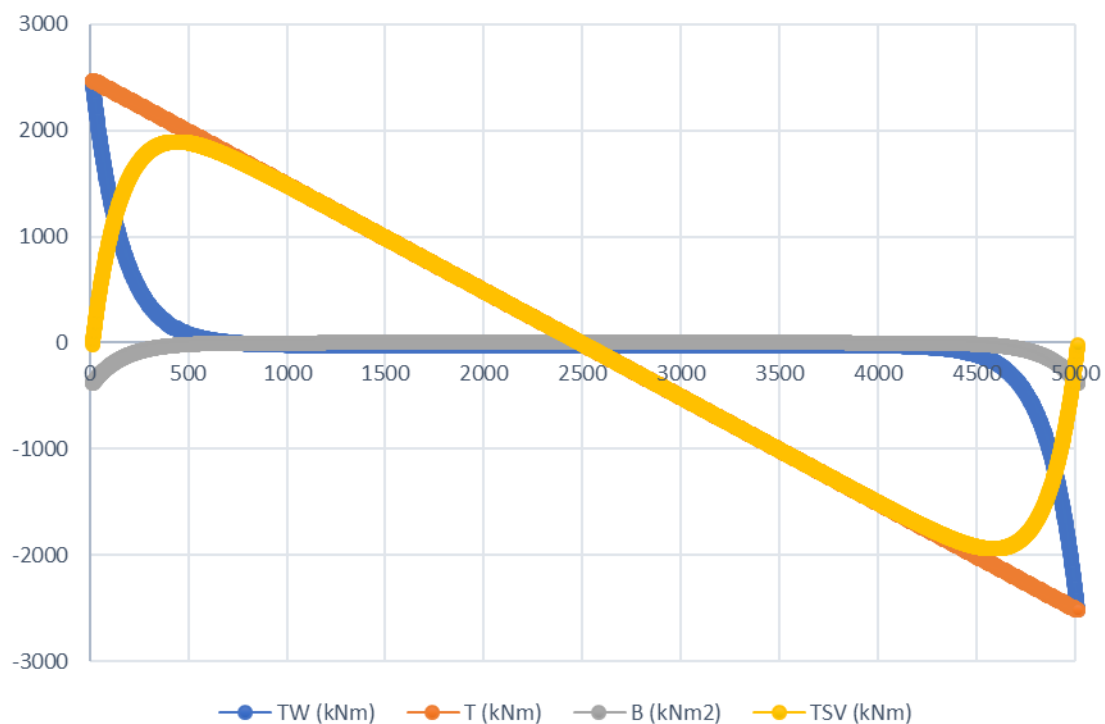


Gráfica 10: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 50 elementos.

Numero de elementos = 500

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	0,00	2495,00	2495,00	-359,89
500	1904,04	100,96	2005,00	8,81
500	1904,04	90,96	1995,00	8,81
1000	1496,32	8,68	1505,00	22,96
1000	1496,32	-1,32	1495,00	22,96
1500	999,86	5,14	1005,00	23,51
1500	999,86	-4,86	995,00	23,51
2000	499,99	5,01	505,00	23,53
2000	499,99	-4,99	495,00	23,53
2500	0,00	5,00	5,00	23,53
2500	0,00	-5,00	-5,00	23,53
3000	-499,99	4,99	-495,00	23,53
3000	-499,99	-5,01	-505,00	23,53
3500	-999,86	4,86	-995,00	23,51
3500	-999,86	-5,14	-1005,00	23,51
4000	-1496,32	1,32	-1495,00	22,96
4000	-1496,32	-8,68	-1505,00	22,96
4500	-1904,04	-90,96	-1995,00	8,81
4500	-1904,04	-100,96	-2005,00	8,81
5000	0,00	-2495,00	-2495,00	-359,89

Tabla 34: Resultados del software para el Caso Particular 1, con 500 elementos.



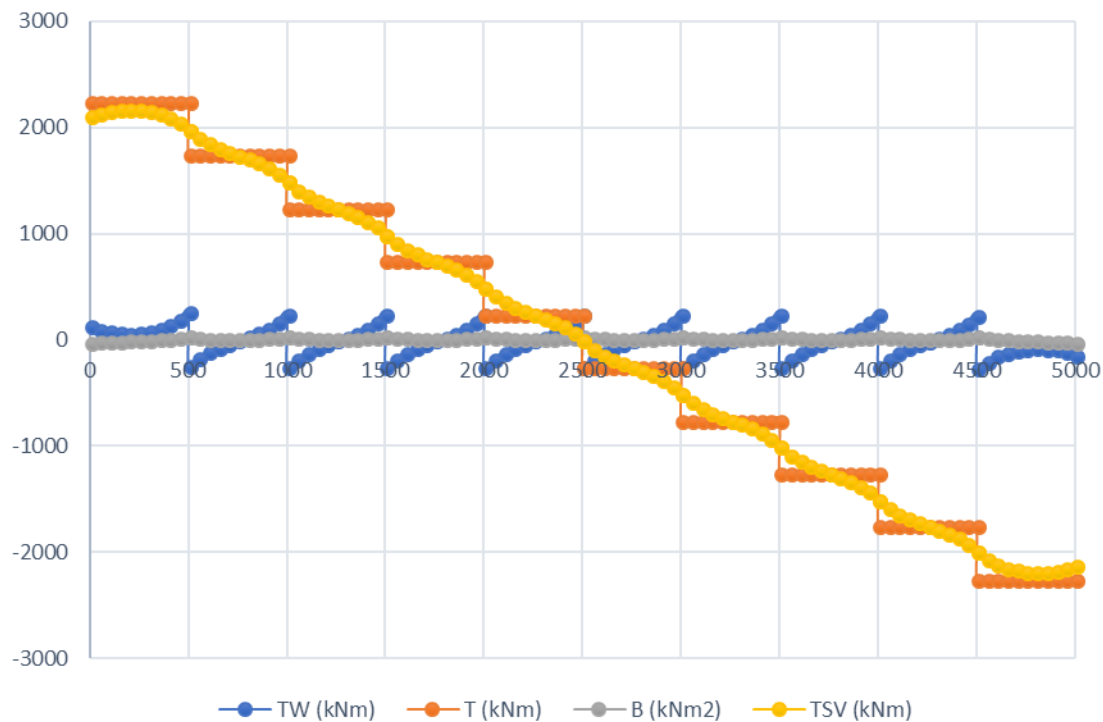
Gráfica 11: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 1, con 500 elementos.

2) Caso Particular 2

Numero de elementos = 10

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	2113,45	136,55	2250,00	-17,88
500	1985,16	264,84	2250,00	39,13
500	1985,16	-235,16	1750,00	39,13
1000	1499,43	250,57	1750,00	41,32
1000	1499,43	-249,43	1250,00	41,32
1500	999,98	250,02	1250,00	41,40
1500	999,98	-249,98	750,00	41,40
2000	500,00	250,00	750,00	41,40
2000	500,00	-250,00	250,00	41,40
2500	0,00	250,00	250,00	41,40
2500	0,00	-250,00	-250,00	41,40
3000	-500,00	250,00	-250,00	41,40
3000	-500,00	-250,00	-750,00	41,40
3500	-999,98	249,98	-750,00	41,40
3500	-999,98	-250,02	-1250,00	41,40
4000	-1499,43	249,43	-1250,00	41,32
4000	-1499,43	-250,57	-1750,00	41,32
4500	-1985,16	235,16	-1750,00	39,13
4500	-1985,16	-264,84	-2250,00	39,13
5000	-2113,45	-136,55	-2250,00	-17,88

Tabla 35: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 10 elementos.

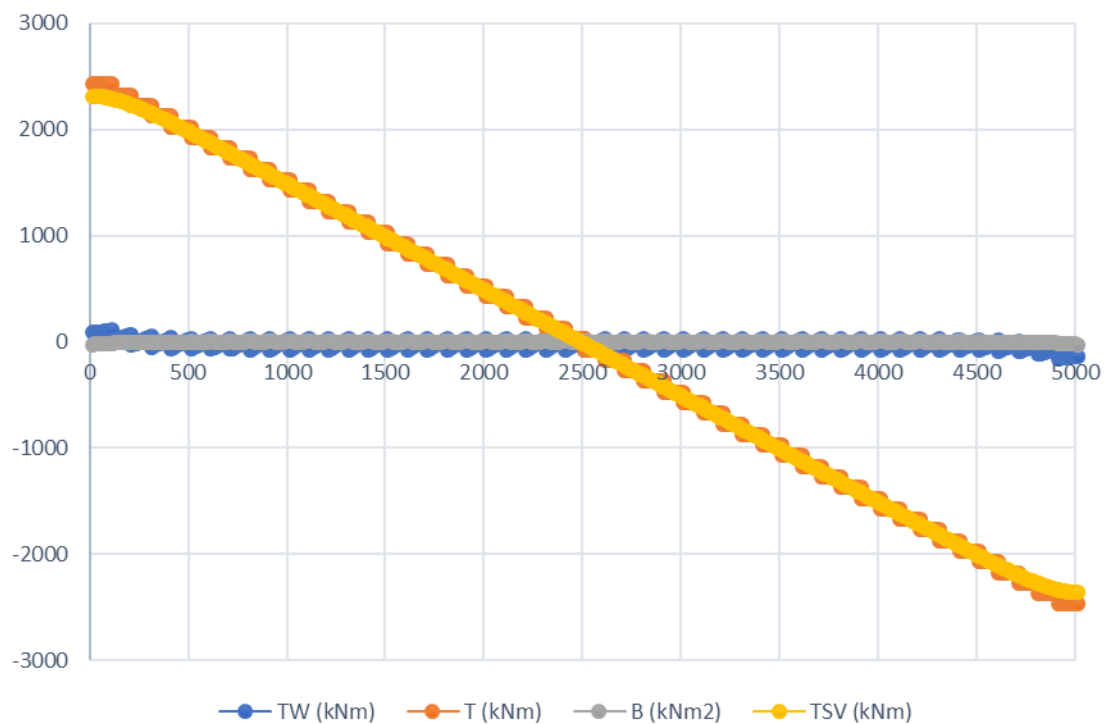


Gráfica 12: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 10 elementos.

Numero de elementos = 50

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	2335,84	114,16	2450,00	-0,83
500	1993,70	56,30	2050,00	23,38265
500	1993,70	-43,70	1950,00	23,38265
1000	1499,76	50,24	1550,00	24,31
1000	1499,76	-49,76	1450,00	24,31
1500	999,99	50,01	1050,00	24,35
1500	999,99	-49,99	950,00	24,35
2000	500,00	50,00	550,00	24,35
2000	500,00	-50,00	450,00	24,35
2500	0,00	50,00	50,00	24,35
2500	0,00	-50,00	-50,00	24,35
3000	-500,00	50,00	-450,00	24,35
3000	-500,00	-50,00	-550,00	24,35
3500	-999,99	49,99	-950,00	24,35
3500	-999,99	-50,01	-1050,00	24,35
4000	-1499,76	49,76	-1450,00	24,31
4000	-1499,76	-50,24	-1550,00	24,31
4500	-1993,70	43,70	-1950,00	23,38
4500	-1993,70	-56,30	-2050,00	23,38
5000	-2335,84	-114,16	-2450,00	-0,83

Tabla 36: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 50 elementos.

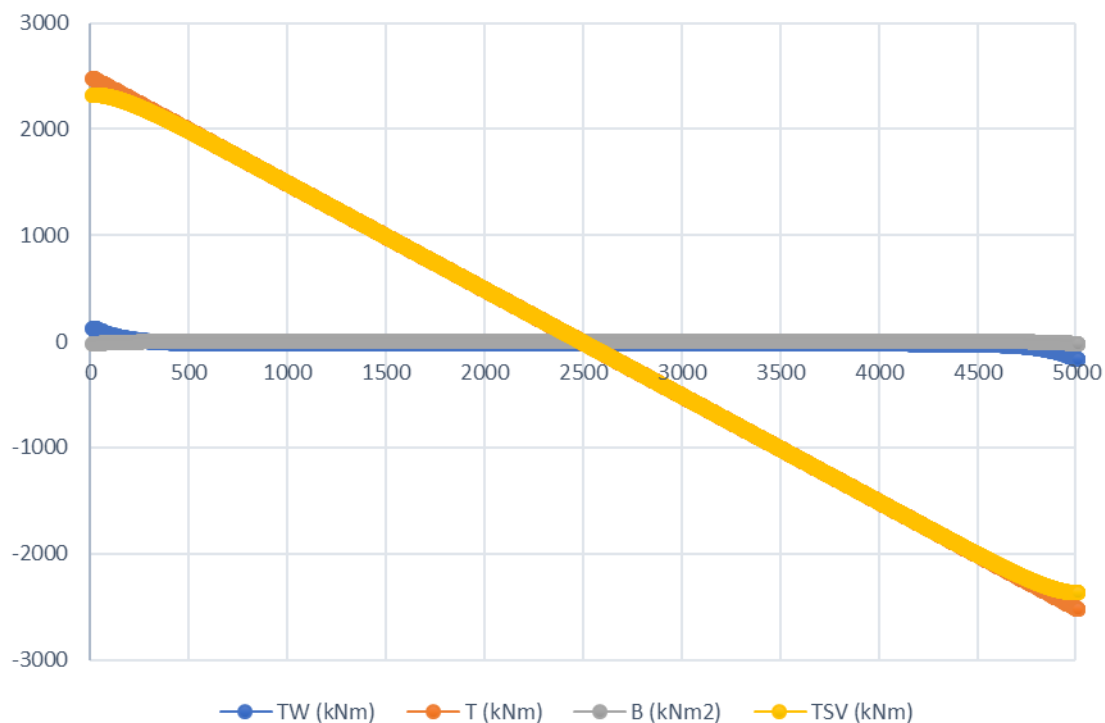


Gráfica 13: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 50 elementos.

Numero de elementos = 500

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	2346,52	148,48	2495,00	-0,01
500	1994,11	10,89	2005,00	22,63
500	1994,11	0,89	1995,00	22,63
1000	1499,77	5,23	1505,00	23,50
1000	1499,77	-4,77	1495,00	23,50
1500	999,99	5,01	1005,00	23,53
1500	999,99	-4,99	995,00	23,53
2000	500,00	5,00	505,00	23,53
2000	500,00	-5,00	495,00	23,53
2500	0,00	5,00	5,00	23,53
2500	0,00	-5,00	-5,00	23,53
3000	-500,00	5,00	-495,00	23,53
3000	-500,00	-5,00	-505,00	23,53
3500	-999,99	4,99	-995,00	23,53
3500	-999,99	-5,01	-1005,00	23,53
4000	-1499,77	4,77	-1495,00	23,50
4000	-1499,77	-5,23	-1505,00	23,50
4500	-1994,11	-0,89	-1995,00	22,63
4500	-1994,11	-10,89	-2005,00	22,63
5000	-2346,52	-148,48	-2495,00	-0,01

Tabla 37: Resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.



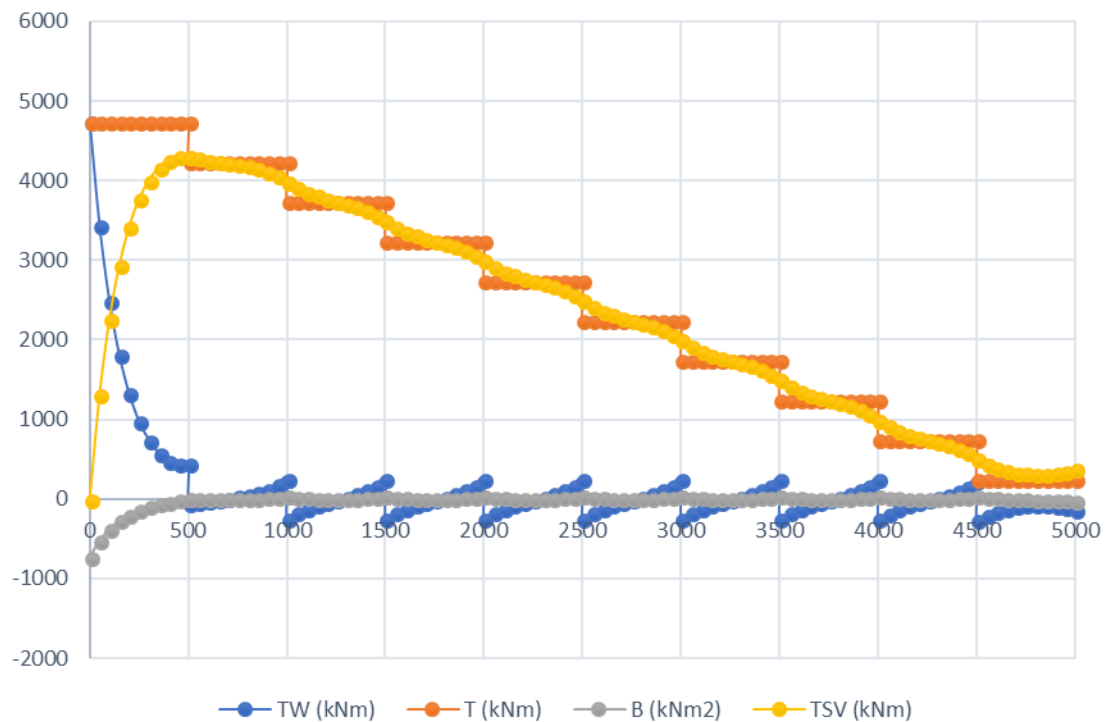
Gráfica 14: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 2, con 500 elementos.

3) Caso Particular 3

Numero de elementos = 10

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	0,00	4750,00	4750,00	-725,43
500	4308,09	441,91	4750,00	11,97
500	4308,09	-58,09	4250,00	11,97
1000	3992,63	257,37	4250,00	40,27
1000	3992,63	-242,63	3750,00	40,27
1500	3499,72	250,28	3750,00	41,36
1500	3499,72	-249,72	3250,00	41,36
2000	2999,99	250,01	3250,00	41,40
2000	2999,99	-249,99	2750,00	41,40
2500	2500,00	250,00	2750,00	41,40
2500	2500,00	-250,00	2250,00	41,40
3000	2000,00	250,00	2250,00	41,40
3000	2000,00	-250,00	1750,00	41,40
3500	1500,02	249,98	1750,00	41,40
3500	1500,02	-250,02	1250,00	41,40
4000	1000,57	249,43	1250,00	41,32
4000	1000,57	-250,57	750,00	41,32
4500	514,84	235,16	750,00	39,13
4500	514,84	-264,84	250,00	39,13
5000	386,55	-136,55	250,00	-17,88

Tabla 38: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 10 elementos.

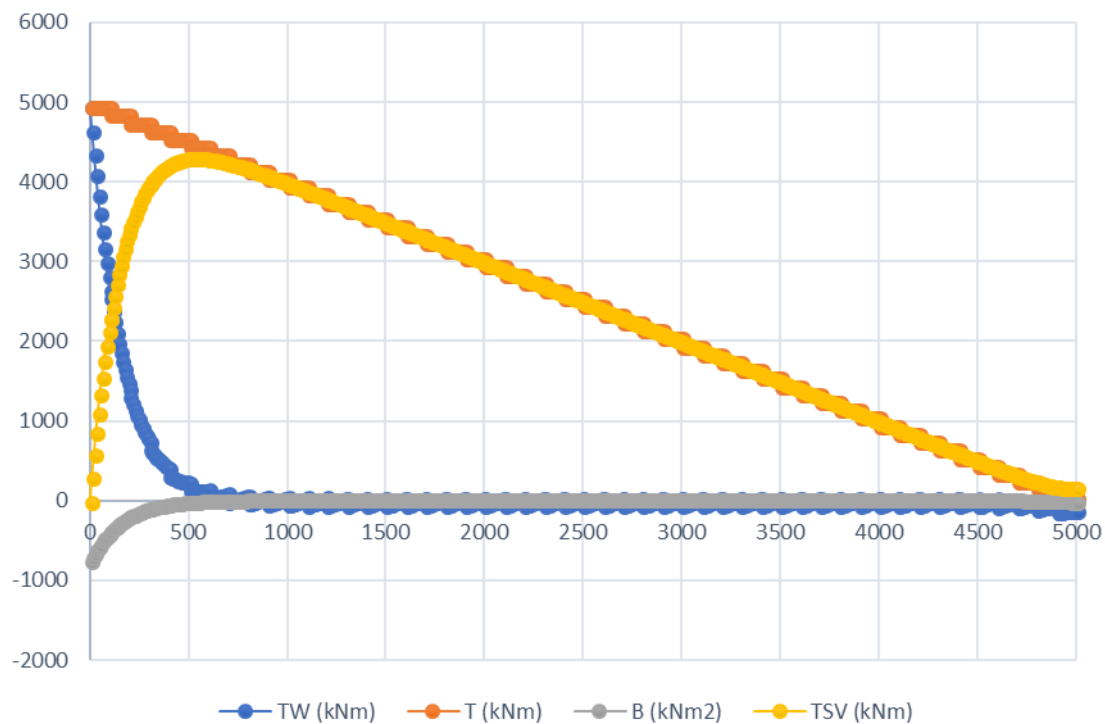


Gráfica 15: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 10 elementos.

Numero de elementos = 50

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	0,00	4950,00	4950,00	-742,49
500	4308,09	241,91	4550,00	-5,08
500	4308,09	141,91	4450,00	-5,08
1000	3992,63	57,37	4050,00	23,22
1000	3992,63	-42,63	3950,00	23,22
1500	3499,72	50,28	3550,00	24,31
1500	3499,72	-49,72	3450,00	24,31
2000	2999,99	50,01	3050,00	24,35
2000	2999,99	-49,99	2950,00	24,35
2500	2500,00	50,00	2550,00	24,35
2500	2500,00	-50,00	2450,00	24,35
3000	2000,00	50,00	2050,00	24,35
3000	2000,00	-50,00	1950,00	24,35
3500	1500,01	49,99	1550,00	24,35
3500	1500,01	-50,01	1450,00	24,35
4000	1000,24	49,76	1050,00	24,31
4000	1000,24	-50,24	950,00	24,31
4500	506,30	43,70	550,00	23,38
4500	506,30	-56,30	450,00	23,38
5000	164,16	-114,16	50,00	-0,83

Tabla 39: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 50 elementos.

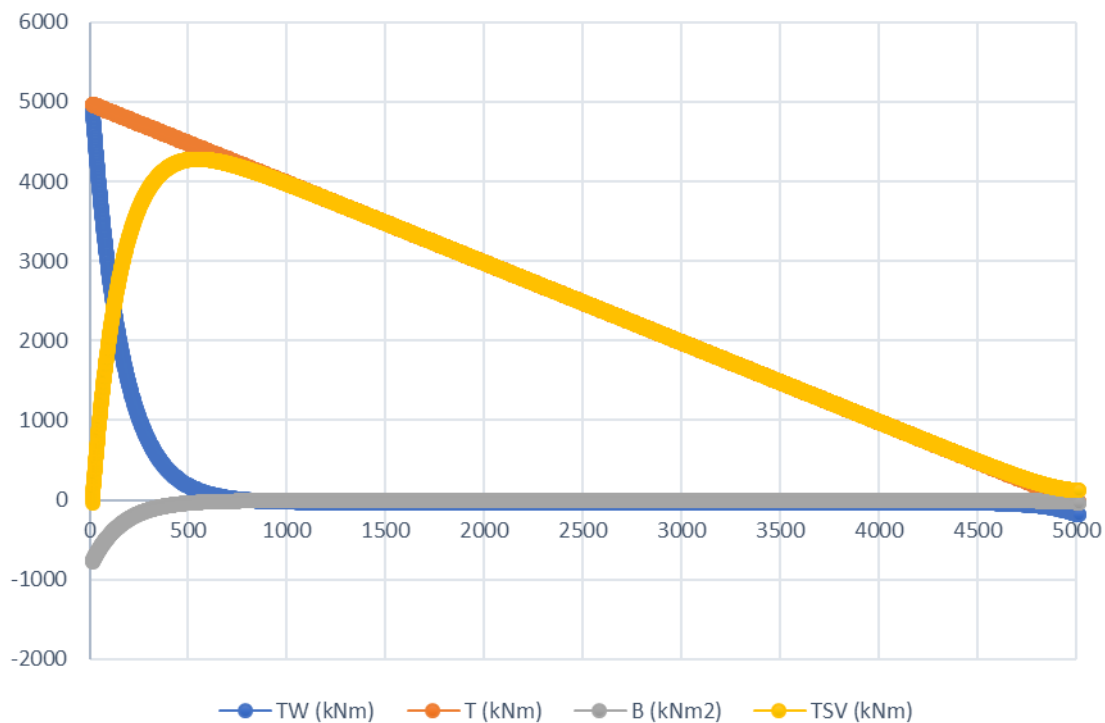


Gráfica 16: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 50 elementos.

Numero de elementos = 500

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	0,00	4995,00	4995,00	-743,31
500	4308,09	196,91	4505,00	-5,90
500	4308,09	186,91	4495,00	-5,90
1000	3992,63	12,37	4005,00	22,40
1000	3992,63	2,37	3995,00	22,40
1500	3499,72	5,28	3505,00	23,49
1500	3499,72	-4,72	3495,00	23,49
2000	2999,99	5,01	3005,00	23,53
2000	2999,99	-4,99	2995,00	23,53
2500	2500,00	5,00	2505,00	23,53
2500	2500,00	-5,00	2495,00	23,53
3000	2000,00	5,00	2005,00	23,53
3000	2000,00	-5,00	1995,00	23,53
3500	1500,01	4,99	1505,00	23,53
3500	1500,01	-5,01	1495,00	23,53
4000	1000,23	4,77	1005,00	23,50
4000	1000,23	-5,23	995,00	23,50
4500	505,89	-0,89	505,00	22,63
4500	505,89	-10,89	495,00	22,63
5000	153,48	-148,48	5,00	-0,01

Tabla 40: Resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos.



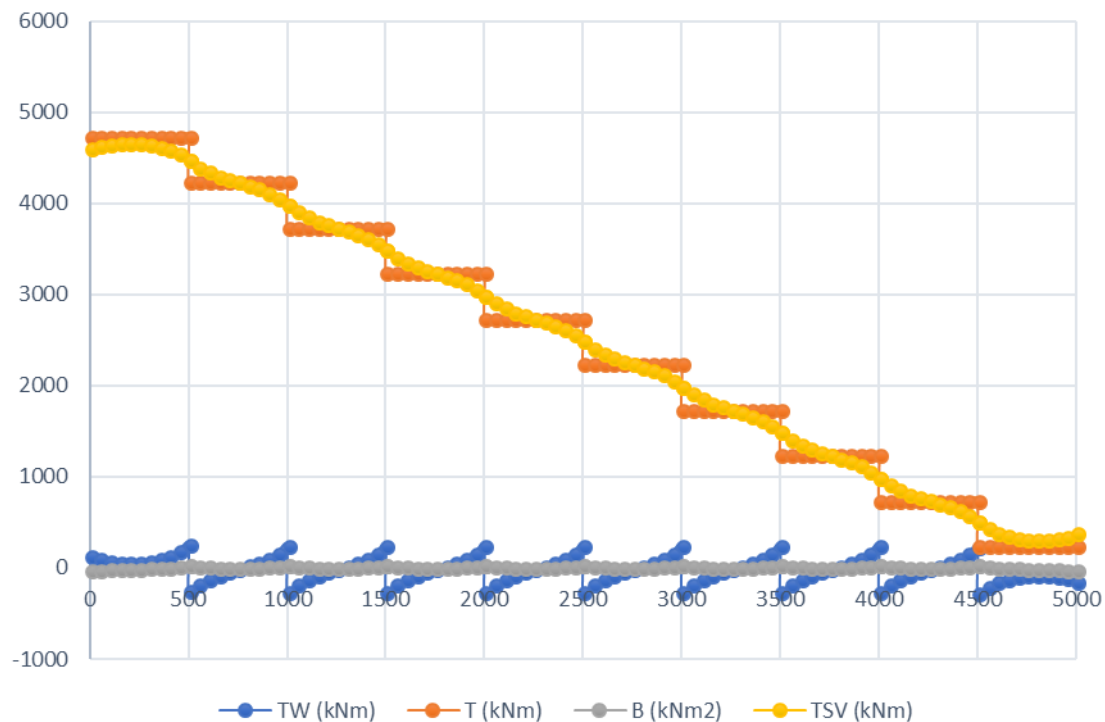
Gráfica 17: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 3, con 500 elementos.

4) Caso Particular 4

Numero de elementos = 10

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	4613,45	136,55	4750,00	-17,88
500	4485,16	264,84	4750,00	39,13
500	4485,16	-235,16	4250,00	39,13
1000	3999,43	250,57	4250,00	41,32
1000	3999,43	-249,43	3750,00	41,32
1500	3499,98	250,02	3750,00	41,40
1500	3499,98	-249,98	3250,00	41,40
2000	3000,00	250,00	3250,00	41,40
2000	3000,00	-250,00	2750,00	41,40
2500	2500,00	250,00	2750,00	41,40
2500	2500,00	-250,00	2250,00	41,40
3000	2000,00	250,00	2250,00	41,40
3000	2000,00	-250,00	1750,00	41,40
3500	1500,02	249,98	1750,00	41,40
3500	1500,02	-250,02	1250,00	41,40
4000	1000,57	249,43	1250,00	41,32
4000	1000,57	-250,57	750,00	41,32
4500	514,84	235,16	750,00	39,13
4500	514,84	-264,84	250,00	39,13
5000	386,55	-136,55	250,00	-17,88

Tabla 41: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 10 elementos.

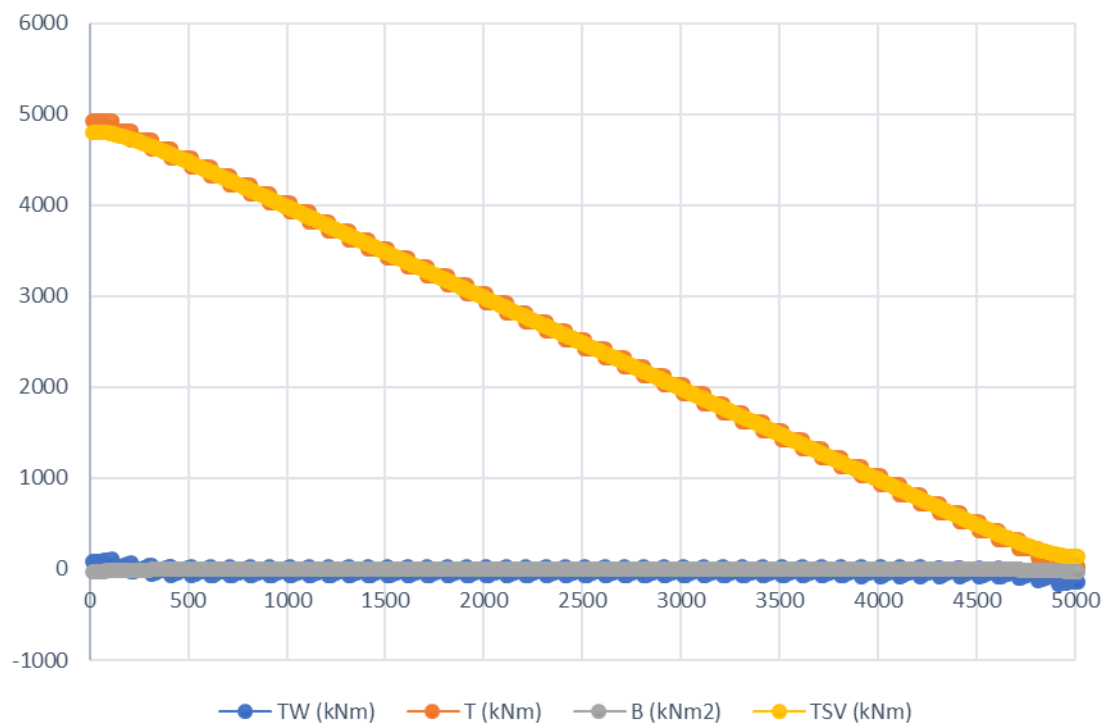


Gráfica 18: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 10 elementos.

Numero de elementos = 50

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	4835,84	114,16	4950,00	-0,83
500	4493,70	56,30	4550,00	23,38
500	4493,70	-43,70	4450,00	23,38
1000	3999,76	50,24	4050,00	24,31
1000	3999,76	-49,76	3950,00	24,31
1500	3499,99	50,01	3550,00	24,35
1500	3499,99	-49,99	3450,00	24,35
2000	3000,00	50,00	3050,00	24,35
2000	3000,00	-50,00	2950,00	24,35
2500	2500,00	50,00	2550,00	24,35
2500	2500,00	-50,00	2450,00	24,35
3000	2000,00	50,00	2050,00	24,35
3000	2000,00	-50,00	1950,00	24,35
3500	1500,01	49,99	1550,00	24,35
3500	1500,01	-50,01	1450,00	24,35
4000	1000,24	49,76	1050,00	24,31
4000	1000,24	-50,24	950,00	24,31
4500	506,30	43,70	550,00	23,38
4500	506,30	-56,30	450,00	23,38
5000	164,16	-114,16	50,00	-0,83

Tabla 42: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 50 elementos.

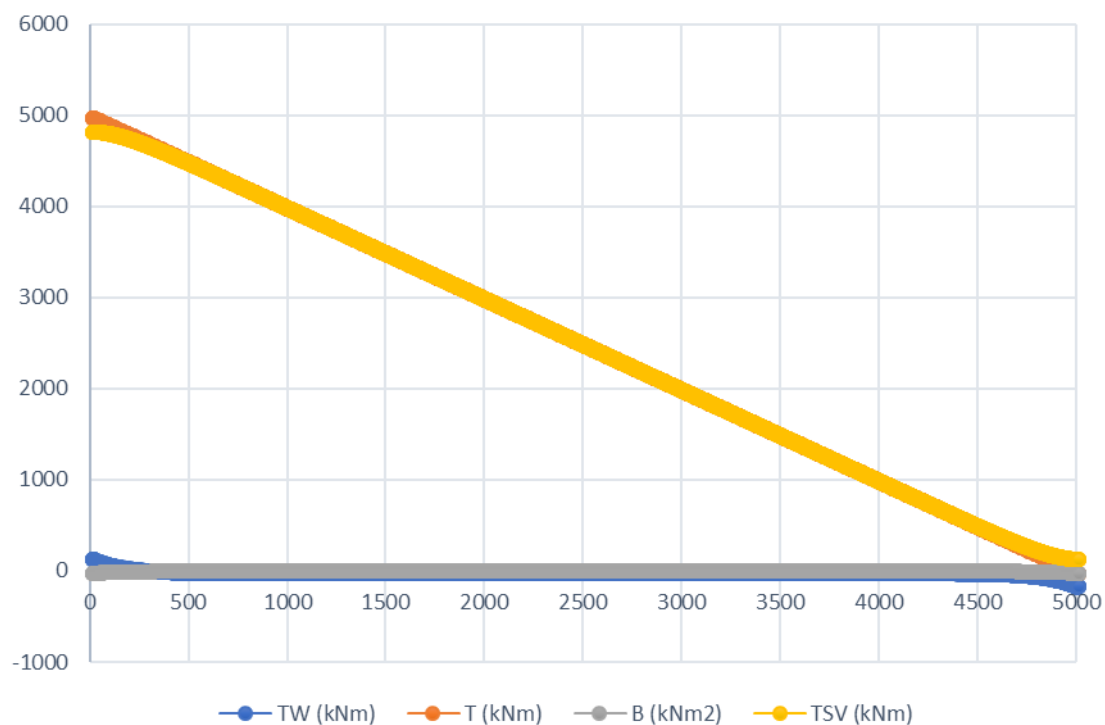


Gráfica 19: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 50 elementos.

Numero de elementos = 500

x (mm)	T_{SV}	T_W	T	BM
0	4846,52	148,48	4995,00	-0,01
500	4494,11	10,89	4505,00	22,63
500	4494,11	0,89	4495,00	22,63
1000	3999,77	5,23	4005,00	23,50
1000	3999,77	-4,77	3995,00	23,50
1500	3499,99	5,01	3505,00	23,53
1500	3499,99	-4,99	3495,00	23,53
2000	3000,00	5,00	3005,00	23,53
2000	3000,00	-5,00	2995,00	23,53
2500	2500,00	5,00	2505,00	23,53
2500	2500,00	-5,00	2495,00	23,53
3000	2000,00	5,00	2005,00	23,53
3000	2000,00	-5,00	1995,00	23,53
3500	1500,01	4,99	1505,00	23,53
3500	1500,01	-5,01	1495,00	23,53
4000	1000,23	4,77	1005,00	23,50
4000	1000,23	-5,23	995,00	23,50
4500	505,89	-0,89	505,00	22,63
4500	505,89	-10,89	495,00	22,63
5000	153,48	-148,48	5,00	-0,01

Tabla 43: Resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos.



Gráfica 20: Representación gráfica de los resultados del software para el Caso Particular 4, con 500 elementos.

Visto bueno-autorización de defensa del TFG



VIST I PLAU D'AUTORIZACIÓ DE DEFENSA DE TREBALL FI DE ... (indicar el que pertorqui GRAU/MÀSTER)

Jo, FERNAN PRATS BELLA Director/a del TFG/TFM dut a terme per l'estudiant/a:

Nom : Nous

Cognoms : Figuera Pérez

DNI : 394282715

Grau en Enginyeria : Mecànica Màster en :

ACREDITO:

Que l'estudiant/a es troba en condicions de realitzar, en la present convocatòria, la defensa del treball de fi de Grau/de Màster que a continuació es relaciona:

Títol del TFG/TFM: Desarrollo y verificación de un software para el análisis de vigas continuas a torsión

INFORMACIÓ NECESSÀRIA	
Competència genèrica a avaluar	<u>Aprendizaje autónomo</u>
Codirector (en cas que n'hi hagi)	
Empresa externa	Nom de l'Empresa
(en cas de modalitat B o D)	Codirector de l'empresa

I perquè consti, a petició de l'interessat i als efectes d'autorització de defensa de TFG/TFM, signo el present vist i plau.

Barcelona a, 26 de abril de 20 18

El/la Director/a del TFG/TFM

Signatura:

